

1. 金利計算Ⅰ

[利息と利率]

生命保険数学のまず最初は金利計算です。英米の教科書では金利計算は生命保険数学とは別課目として勉強することが多いようですが、日本では伝統的に生命保険数学の中で最初に解説することが多いようで、ここではその伝統に従います。

さて、金利計算というのは、タイミングをずらしたお金のやりとりには利息が発生する、という現実を反映しています。利息が発生しない場合は利息が0だと考えれば、その場合も含めることができます。

この利息の基本となる式は、

$$S = P + I \quad (1)$$

ここで、
 S : 元利合計
 P : 元本または元金
 I : 利息

です。

P は元本を表す principal の頭文字、 I は利息を表す interest の頭文字です。 S は元利合計の合計の sum の頭文字かなと思いますがよく知りません。

この式は単なる足し算ですから、わかりやすいものですが、この式から、金融という巨大な世界が生まれてきます。

はじめ、(1) 式には時間の長さという考え方は必ずしも入ってきません。たとえば、田植えをする前に種もみを貸しつけて稲刈りが終わったら利息をつけて返してもらう、とか、船で商売をするために航海する際、積み込む商品を買うための資金を借りて、航海が終って持ち帰った積荷を売り払ったら利息をつけて借金を返済する、など、一連の出来事はきまっていますが、それまでの期間の長さは必ずしもきまっているわけではありません。

しかし、その当時から、元本が多ければその分利息も多いのが当然だ、という考え方はあったようで、その考え方は利息 (I) を元本 (P) で割った比率である利率 (i) という考え方があったようです。

$$i = I/P \quad \text{あるいは} \quad I = P \cdot i$$

これを上の (1) 式に入れると

$$S = P + P \cdot i = P \cdot (1 + i) \quad (2)$$

あるいは

$S/P = 1 + i$ ということになります。

[期間の効果 — 単利と複利]

その後、このようなお金の貸し借りが一般化し、日常化し、専門化すると、今度は「同じ元本でも期間が長ければ利息も多いのが合理的だ」、という考え方ができました。たとえば、1万円借りて、1日10円の利息を払う、という約束をしたとすると、2日なら20円、3日なら30円、10日なら100円、100日なら1,000円、1年なら3,650円の利息という具合です。こんな具合に、利息が期間に比例して計算される方法を単利といいます。期間1に対する利率を i とすれば期間 n に対する利率は $n \cdot i$ となります。

期間1に対する利息を I とすれば

$$I = P \cdot i$$

期間 n に対する利息は

$$P \cdot (n \cdot i) = n \cdot I$$

元利合計は

$$S = P + n \cdot I = P + P \cdot (n \cdot i) = P \cdot (1 + n \cdot i) \quad (3)$$

となります。

この単利というのは通常、期間の短い金利計算に使われます。標準的な期間1は1日で、1日あたりの利率は、100円に対する利息で表します。上の1万円に対して1日10円というのは100円に対しては0.1円、10銭です。そこでこれを日歩(ひぶ)10銭と言い表します。銭というのは今ではあまり使われることがなくなっ
てしまいましたが円の1/100の単位です。

江戸時代の日本は、金貨(1両小判)、銀貨(匁(もんめ)あるいは目(め))、銭貨(1文銭)という具合に複数通貨の変動相場制だったのですが、これが、明治維新で変えられて、1両=1ドル=1円、という形で円という通貨が導入されました。その際、1ドル=100セントをまねて1円=100銭という単位が導入されました。銭はセントのゴロ合わせで、江戸時代は通貨の種類だったものを、明治以

降通貨の単位にしたわけです。

この銭は日本が太平洋戦争に負けるまで一般に使われていましたが、戦後のインフレで1円未満のお金の値うちがほとんどゼロになってしまったので、今ではお金として使われることがなく、単位としての使い方だけが残っています。たとえばネジ100個で235円なんて時に、1個2円35銭なんて具合です。

日歩1銭は、100円に対して1/100円ですから率にして1/10,000です。1年間の利息は、その365倍で3円56銭、率にして3.65%となります。

単利というのは期間の短い場合によく使われますが期間が長い時は複利という方法がよくつかわれます。たとえば期間1年の利率が10%だから1年後には元利合計が元本の1.1倍、2年後には1.1倍の1.1倍(=1.21倍)、3年後は1.1倍の1.1倍の1.1倍(=1.331倍)という具合に掛け算で計算します。

1年の利率を(i)とすると、

$$S = P \cdot (1 + i)$$

となるので、 n 年後だったら、

$$S = P \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdots (1 + i)}_{n \text{ 回}} = P \cdot (1 + i)^n \quad (4)$$

となります。 $(1 + i)^n$ は $(1 + i)$ を n 回掛けた結果で、「 $(1 + i)$ の n 乗(じょう)」といいます。

[二項係数]

$(1 + i)^n$ を展開すると

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= 1 + n \cdot i + \frac{n(n-1)}{2} i^2 + \cdots + i^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = \sum_{k=0}^n {}_n C_k i^k \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\binom{n}{k} = {}_n C_k$$

は、二項係数とよばれる数です。もちろん、 $\binom{n}{k}$ は $\frac{n}{k}$ とは、全く別物です。

今、高校などでは $\binom{n}{k}$ を教えないで ${}_nC_k$ の方で統一しているようですが、私などは $\binom{n}{k}$ の方がなじみが深く、 ${}_nC_k$ の方はちょっと慣れません。どちらも同じものを意味するのですが、 ${}_nC_k$ の方はもともと n 個の中から k 個取り出す組合せの数を示すもので、そのため組合せ (Combination) の頭文字をとって、C となっています。

$\binom{n}{k}$ の方は、上のような

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{(n-1)} \cdot b + \binom{n}{2} a^{(n-2)} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{(n-1)} + b^n$$

のような式の展開の係数を示すものなので、二項係数 (二項というのは a と b の2つ、ということです。) とよばれるのです。どちらも

$$\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1}$$

となります。ここで

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdots 2 \cdot 1$$

で、これを『 n の階乗 (かいじょう)』といいます。

このあたり、数学を勉強した人には今さらながらの話ですが、そうでない人は私の解説をそのまま鵜呑みにしてもらっても良いし、興味があったら高校の教科書なり参考書なりを見てください。数学の好きな人は、数学を勉強する時は全て1つ1つ自分で証明を確かめなければいけない、などと言ったりしますが、別にそれにこだわる必要はありません。世の中で山ほどの人が確認してくれたことを、そのままウノミに信じこんで使っても別に誰に遠慮もいりません。

「生命保険数学」の二見さんは私よりも (ちょっと) 古い人なので、 $\binom{n}{k}$ の方の記号しか使っていません。学校で ${}_nC_k$ の方の記号しか勉強したことのない人は、 $\binom{n}{k}$ を ${}_nC_k$ と置きかえて読んで下さい。私も $\binom{n}{k}$ の方になじみが多いので、以後の解説でも $\binom{n}{k}$ の記号を使うことにします。くれぐれも $\frac{n}{k}$ と混同しないようにしてください。

参考までに

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

となります。

また $\sum_{k=0}^n$ というのは k を 0 から、1, 2, 3... と n まで動かしたときの $\sum_{k=0}^n$ の右側の式を全部合計する、という意味です。 $\sum$ というのはシグマと読み、ローマ字の S に対応するギリシャ文字の大文字です。合計は、英語では Sum ですから、その頭文字をとって、とはいえ S はもっといろいろな所で使っているのだからちょっと変えてギリシャ文字にしたというわけです。

2. 金利計算 II へ