2.　金利計算II

［単利と複利］

このようにまとめると

$$\text{単利}: S = P \cdot (1 + n \cdot i) \tag{5}$$

$$\text{複利}: S = P \cdot (1 + i)^n \tag{6}$$

となりますが、ここで $(1+i)^n$ **を展開すると、**

$$(1+i)^n = 1 + n \cdot i + \frac{n(n-1)}{2} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} i^3 + \cdots + n \cdot i^{n-1} + i^n$$

となるのですが、 $n \cdot i$ **が十分小さければ** $\dfrac{n(n-1)}{2} i^2$ **以下の項は十分小さくなるので** $(1+i)^n$ **は** $(1+n \cdot i)$ **とほぼ等しくなります。即ち、複利の近似として単利の計算が使える、ということになります。**

具体的に $i = 2$ **%、** $n = 10$ **としましょう、**

$$(1 + n \cdot i) = (1 + 10 \cdot 0.02) = 1.2$$

$$(1+i)^n = (1 + 0.02)^{10} = 1.21899442$$

ですが上の展開式の各項は、

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
n \cdot i &= 0.2 \\
\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} i^2 &= 0.018 \\
\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} i^3 &= 0.00096 \\
\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} i^4 &= 0.0000336 \\
\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} i^5 &= 0.000000806
\end{aligned}$$

という具合になります。

一方、 $n \cdot i$ **が小さくないと、単利と複利はとんでもなく違ってきます。**
たとえば、高利貸しなんかの話によく出てくるトイチという、10日で1割、という金利で1年間(とはいえこれを10日の倍数にするため、360日とします。)の金利計算は単利と複利でどうなるか、見てみましょう。
360日は10日の36倍ですから

$$1 + n \cdot i = 1 + 36 \cdot 0.1 = 1 + 3.6 = \ 4.6$$

$$(1+i)^n \ = (1+0.1)^{36} \ = \qquad\qquad 30.9$$

と 1 ケタちがってきます。

[期間をどんな長さにでも拡張]

ここまで、金利計算の期間を何倍か長くしましたが、逆にこれを短くするとどうでしょう。

期間をたとえば $1/n$ としましょう。
単利の考え方では、利息は期間に比例する、と考えますから期間が $1/n$ になれば利息も $1/n$ になります。
すなわち

$$S = P + I \cdot \frac{1}{n} = P\left(1 + i \cdot \frac{1}{n}\right) = P\left(1 + \frac{i}{n}\right) \tag{7}$$

となります。
複利の考え方では、元利合計の増え方が一定だ、と考えますから、期間 $1/n$ の元利合計の増え方は $(1+i)^{1/n}$ となります。
すなわち

$$S = P \cdot (1+i)^{\frac{1}{n}} \tag{8}$$

です。この増え方を n 回くり返せば、

$$S = P \cdot \left\{(1+i)^{\frac{1}{n}}\right\}^n = P \cdot (1+i)$$

となって、メデタシメデタシとなるわけです。

ここでは、n 倍とか $1/n$ とかで考えましたが、この両方を使えば m/n 倍（すなわち m 倍の $1/n$ あるいは $1/n$ の m 倍）も同じように考えられ、それを連続的にちょっと広げてやれば、整数や分数に限らずすべての正の数 r についても同様に考えることができます。
また、これまでは全て正の数を考えていました。これは時間の向きを現在から将来に向けて考えていたのですが、これを、負の数まで広げて考えると、現在か

ら過去に向かって考える、ということになります。
そこで、r をプラスでもマイナスでもいい任意の数とした時、

単利 $S = P(1 + r \cdot i)$

複利 $S = P(1 + i)^r$

ということで、元本から元利合計を考えることができます。

さて、ここで r というのは時間の長さのことですから、これを t（time）で置きかえると、

単利 $$S = P(1 + t \cdot i) \tag{9}$$

複利 $$S = P(1 + i)^t \tag{10}$$

となります。

この S を t の関数と考えて S_t と書くことにし、$t = 0$ のときの S を S_0 と書くと、

単利
$$\begin{aligned} S_t &= P(1 + t \cdot i) \\ S_0 &= P \\ S_t &= S_0(1 + t \cdot i) \end{aligned}$$

複利
$$\begin{aligned} S_t &= P(1 + i)^t \\ S_0 &= P \\ S_t &= S_0(1 + i)^t \end{aligned}$$

ということになります。

基準として $t = 0$ の時点をとったので上のようになったのですが、基準を $t = T$ の時点にすると

単利
$$\begin{aligned} S_T &= P(1 + T \cdot i) \\ S_t &= P \cdot (1 + t \cdot i) = \frac{S_T}{1 + T \cdot i} \cdot (1 + t \cdot i) \\ &= S_T \left(1 + (t - T)\frac{i}{1 + T \cdot i}\right) \end{aligned}$$
$$\left(\frac{1 + t \cdot i}{1 + T \cdot i} - 1 = \frac{(t - T) \cdot i}{1 + T \cdot i} = (t - T)\frac{i}{1 + T \cdot i}\right)$$

複利
$$\begin{aligned} S_T &= P(1 + i)^T \\ S_t &= P \cdot (1 + i)^t = \frac{S_T}{(1 + i)^T} \cdot (1 + i)^t = S_T(1 + i)^{t-T} \end{aligned}$$

ということになります。T から t までの時間は $t-T$ ですから、上の

$$\begin{array}{lrcl} \text{単利} & S_t & = & S_0(1+t\cdot i) \\ \text{複利} & S_t & = & S_0(1+i)^t \end{array}$$

とくらべると、
単利の式の方は

$$S_0 \Rightarrow S_T\ ,\ t \Rightarrow t-T\ ,\ i \Rightarrow \frac{i}{1+T\cdot i}$$

とすると同じ形の式になります。複利の式の方は、

$$S_0 \Rightarrow S_T\ ,\ t \Rightarrow t-T\ ,\ i \Rightarrow i$$

という、そのままで同じ形をしています。
　そのため、理論的には複利の方の考え方をとることが普通です。生命保険でも、ほとんどの場合、金利計算は複利計算をしています。

　数学の得意な人は、上の議論のように $1,2,3\cdots$ という点々の時点を考える延長として、t という連続的な時点で考えたり、あるいは差の代わりに微分、とか和の代わりに積分とかを使いたがります。
　これでちょっと考えてみましょう。数学の嫌いな人は、別に几帳面に一つ一つ確認する必要はないので、適当に読み進めてくれてもいいし、あるいはこの部分、まとめて読み飛ばしてもらってもかまいません。

［ちょっと微分積分など］

さて単利の方の考え方は、

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \Delta I_t$$

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t = \Delta I_t$$
$$\frac{\Delta S_t}{\Delta t} = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{\Delta t} = \frac{\Delta I_t}{\Delta t}$$

ですから、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I_t}{\Delta t} = \frac{dS_t}{dt} = I_t$$

と書けば、

$$S_T = S_0 + \int_{t=0}^{T} I_t\, dt \qquad (11)$$

ということになります。すなわち元利合計は元本に利息を積み上げて（足し上げて）いったものということです。
　ここで $I_t = I$（一定）とすると

$$S_T = S_0 + I \cdot T$$

となりますから $\dfrac{I}{S_0} = i$ とおけば

$$S_T = S_0(1 + i \cdot T)$$

となります。

複利の方の考え方は

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot (1 + \Delta i)$$
$$\Delta i = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$$
$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{1}{S_t} \cdot \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{\Delta t} = \frac{1}{S_t} \cdot \frac{\Delta S_t}{\Delta t}$$

ですから、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta t} = i_t$$

とかけば、

$$i_t = \frac{1}{S_t} \cdot \frac{dS_t}{dt}$$

となるので、

$$\begin{aligned} i_t\,dt &= \frac{1}{S_t} \cdot \frac{dS_t}{dt}\,dt \\ &= \frac{d(\ln S_t)}{dt}\,dt \\ \int_{t=0}^{T} i_t\,dt &= \int_{t=0}^{T} \frac{d(\ln S_t)}{dt}\,dt \\ &= \int_{t=0}^{T} d(\ln S_t) \\ &= \ln(S_T) - \ln(S_0) \\ &= \ln \frac{S_T}{S_0} \end{aligned}$$

$$S_T = S_0 \times \exp\left(\int_{t=0}^{T} i_t\,dt\right) \tag{12}$$

となります。

[指数と対数]

ここで、$\ln$ は自然対数で $\exp$ はその自然対数の底 e を底とする指数関数です。e^x と書くこともあるのですが、x の中身が大きくなるとわかりにくくなるので、そんな時は $\exp(x)$ と書くことになっています。

この $\ln, \exp$ はなかなかすぐれものの関数で、$\ln$ は、0 より大きく無限大より小さい数を、マイナス無限大より大きく無限大より小さい数に変換し、$\exp$ の方は、マイナス無限大より大きく無限大より小さい数を、0 より大きく無限大より小さい数に変換します。$\ln$ と $\exp$ は逆変換になっていて、$\ln(\exp(x)) = x, \exp(\ln(a)) = a$ となります。これらの関数は掛け算を足し算に（$\ln$）、その逆に足し算を掛け算に（$\exp$）変換してくれます。

たとえば、A, B, C を正の数だとして、$\ln(A) = a, \ln(B) = b, \ln(C) = c$ としましょう。
すると、

$$
\begin{array}{rcl}
A \times B \times C & \xrightarrow{\ln} & \ln(A \times B \times C) \\
\| & & \| \\
\exp(a) \times \exp(b) \times \exp(c) & & \ln(A) + \ln(B) + \ln(C) \\
\| & & \| \\
\exp(a+b+c) & \xleftarrow[\exp]{} & a+b+c
\end{array}
$$

となります。

すなわち、$A \times B \times C$ という掛け算が $\ln$ で $\ln(A) + \ln(B) + \ln(C)$ という足し算になり、その結果を $\exp$ で戻してやれば、元の $A \times B \times C$ になる、というわけです。

逆に $a + b + c$ という足し算は $\exp$ で $\exp(a) \times \exp(b) \times \exp(c)$ という掛け算になり、その結果を $\ln$ で戻してやれば元の $a + b + c$ になる、というわけですが、一般に足し算より掛け算の方がやっかいなので、足し算を掛け算に変換して計算する、というのはあまりありません。通常は掛け算を足し算に変換する、という方を使います。

$\dfrac{dS_t}{dt}$ というのは S_t の変化率（S_t がどれだけ額として変化するか）を表し、それを S_t で割った $\dfrac{1}{S_t} \cdot \dfrac{dS_t}{dt}$ は S_t の相対的変化率（S_t がどれだけ自分自身に対する率として変化するか）です。

複利の考え方からすると、元利合計は元本に相対的変化率を掛けることを積み重ねていったもの、ということです。

上の式で $i_t = i$（一定）とすると、

$$S_T = S_0 \times \exp\left(\int_{t=0}^{T} i_t \, dt\right) = S_0 \times \exp(i \cdot T) = S_0 \times \{\exp(i)\}^T$$

ここで $\exp(i) = 1 + j$（$j = e^i - 1$）と置くと、

$$S_T = S_0(1+j)^T$$

となり、利率 j の複利の式になります。

$$1 + j = \exp(i) = e^i = 1 + i + \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3!}i^3 + \cdots\cdots$$

ということになるので、j は i よりちょっと大きくなります。

[変化する量をどう見るか]

　一般に、たとえば時間の経過とともに連続的に変化する量 S_t があったとします。これを、変化する差分に注目して、最初の量に差分をつけ加えていくと最後の量になる、という、式で表すと、

$$S_n = S_0 \times \sum_{k=0}^{n-1} \Delta S_k = S_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1} - S_k)$$

という見方と、
（相対的）変化率の方に注目して、

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S_{k+1}}{S_k} \right) \\ &= S_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{(S_{k+1} - S_k)}{S_k} \right\} \end{aligned}$$

という、最初の量に、その相対的変化率を次々にかけていくと最後の量になる、という見方があります。

　なお、上で $\prod$ と書いたのは $\sum$ の足し算を掛け算に直した記号で、足し算（和）の Sum の S のギリシャ文字 Σ（シグマ）と同じく、掛け算（積）の Product の P のギリシャ文字 Π（パイ）で、おなじみ円周率（π）の大文字です。

$$S_n = S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (S_{k+1} - S_k)$$

で $S_{k+1} - S_k = \Delta S_k = I$ とすると、

$$S_n = S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} I = S_0 + n \cdot I$$

という単利の式になります。
また

$$S_n = S_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{(S_{k+1} - S_k)}{S_k} \right\}$$

で

$$\frac{(S_{k+1} - S_k)}{S_k} = i$$

とすると

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} (1+i) \\ &= S_0 \times (1+i)^n \end{aligned}$$

という複利の式になります。

この差分を足していくという見方、相対的変化率を積み重ねていくという見方、の二つの見方を常に頭の中に入れておくと、役に立つことが多いです。アクチュアリー試験を受験しようと思うのであれば、どちらも使いこなすことが必要になります。

3. 金利計算 III へ