

3. 金利計算III

[割引率と現価率]

今までは、元本に利息が加わって元利合計、となる

$$S = P + I$$

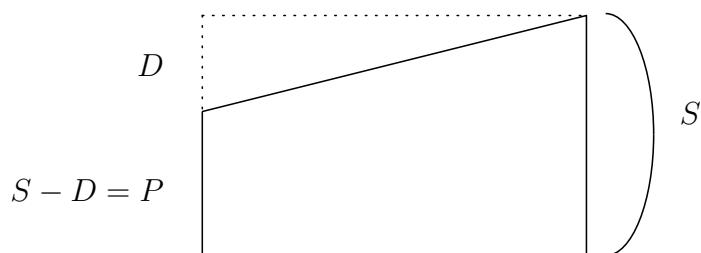
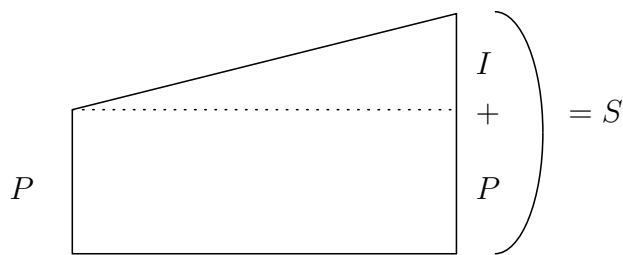
という式を中心に考えてきましたが、これを S の方から P に向かって考えると、

$$P = S - I$$

となります。見方を変えたので I を D で置きかえて、

$$P = S - D$$

となります。図に示すと、



となります。 D は割引 (discount) を示します。

ここで、 I と D は額としては同じものなのですが、
・その位置が違う (I は S と同じ時点、 D は P と同じ時点)

・ I は $\frac{I}{P}$ という比率で考える、 D は $\frac{D}{S}$ という比率で考える。
の2つの点で異なります。

$$P = S - D$$

というのは、

元利合計が S になるような元本 P は、元利合計から割引 D を差引いた額だ。

ということを示します。

この D を S で割って

$$d = \frac{D}{S}$$

を割引率といいます。

このようにすると、

$$P = S - D = S - S \cdot d = S(1 - d)$$

となり、これまでの

$$S = P(1 + i)$$

の式とくらべると

・ S と P を入れかえる。

・ i と $-d$ を入れかえる。

と一方からもう一方へ変換することができます。

ここまで来ると、これまでの単利と複利の考え方は、そのまま使えるので、

単利 $P = S(1 - t \cdot d)$

複利 $P = S(1 - d)^t$

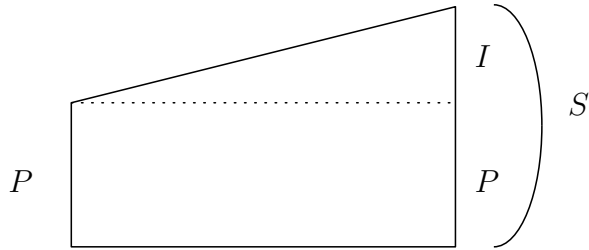
とか

単利 $P_T = P_0 - \int_{t=0}^T D_t dt$

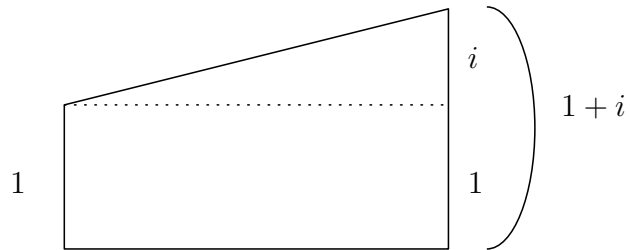
複利 $P_T = P_0 \times \exp\left(-\int_{t=0}^T d_t dt\right)$

とかの式を、同様に導きだすことができます。

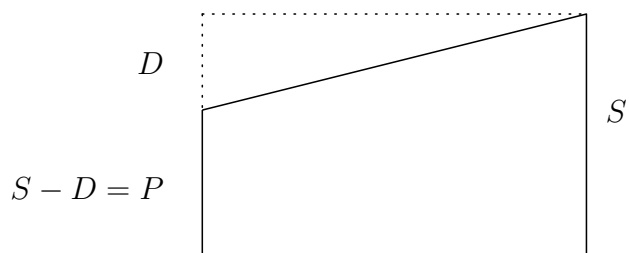
さてここで、



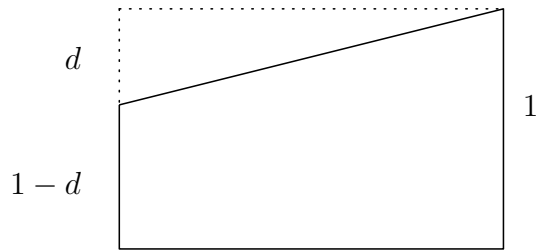
を P で割ると、



となり、また

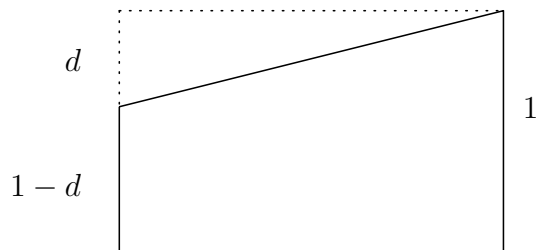


を S で割ると、



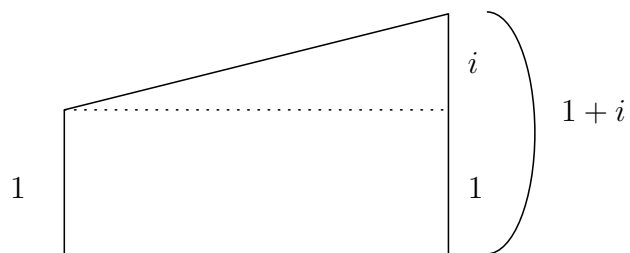
となります。

この



(図1)

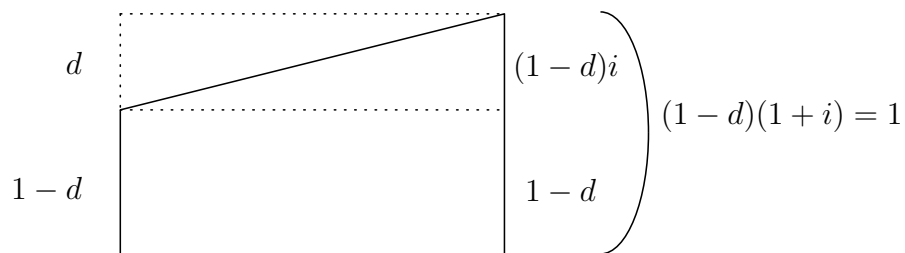
と



(図2)

を重ねてみましょう。

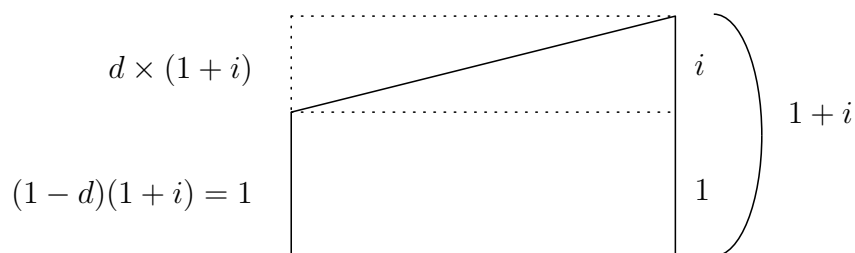
まず最初に図1の左側の $1-d$ の所に図2の左側の1が重なるように、図2を $(1-d)$ 倍に縮めて重ねると、



となるので $(1-d)i = d$
 $(1-d)(1+i) = 1$

となることがわかります。

今度は図2の左の1の所に図1の左側の $1-d$ が重なるように図1を $(1+i)$ 倍にちょっとのばして重ねると



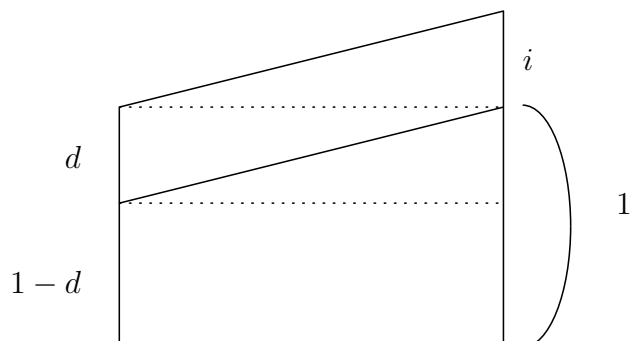
となるので

$$(1-d)(1+i) = 1$$

$$d \times (1+i) = i$$

となることがわかります。

最後に図1と図2をそのまま重ねると



から

$$(1-d)(1+i) = 1$$

$$d \times (1+i) = i$$

となることがわかります。

新しい記号 v を

$$v = \frac{1}{1+i} = 1-d$$

で定義すると

$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = v \cdot i$$

$$i = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{d}{1-d} = \frac{d}{v}$$

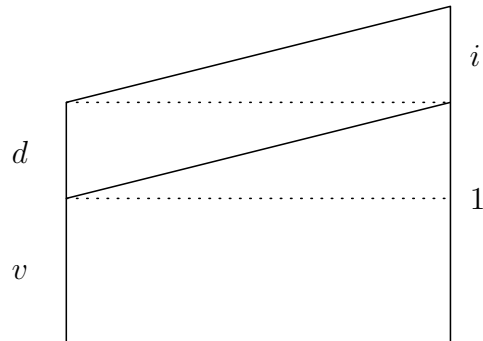
となります。

この v は、 $\frac{1}{1+i} = 1-d$ の定義から、元利合計が 1 になるような元本を表します。そこでこれを現価率といいます。たとえば利率の期間が 1 年だとすると、1 年後に 1 となるような現在の価は v ということで現価ということになります。この伝でいけば現在の 1 の 1 年後の価 $(1+i)$ を終価と名づけて、何か適当な記号を導入してもいいのですが、 $(1+i)$ をわざわざ置きなおすこともない、ということでそのための記号は特に使われていないようです。

i, d, v は、どれか 1 つが決まれば残りの 2 つは自動的に決まってしまう。いろいろな式で i や d は $(1+i)$ とか $(1-d)$ という形で出てくるのですが、 v はそのままの形で出てくるのでこの 3 つの中では一番使い勝手がいいものです。

そのため生命保険数学では以後、基本的に v ばかり使うことになりましたが、それでも時々、 d や i が出てくることがあります。

もし、アクチュアリー試験を受験するのであれば、 i, d, v を相互にいつでも変換できるようにしておく必要があります。



この図をしっかり覚えておくと便利です。

4. 金利計算 IV へ