4.　金利計算IV

［time value of money］

　さて、現在、あらゆる企業や団体は原則、会計制度にもとづいて会計報告をしています。この会計制度にも様々ありますが、最も大事な原則は、

　　収入でも支出でも、資産でも負債でも、全て単一の通貨の金額で評価する。

ということです。これによって、足し算でも引き算でも自由にできるようになります。また大小の比較もできるので、A社とB社、どっちが金持ちか、とか、去年と今年、どっちが儲かったか、などという計算ができるようになります。

　会計の世界では、お金や商品や不動産や備品などを単一通貨の金額で評価する、というやり方をとっているのですが、同様に金融の世界では、異なる時点でのお金の流れを単一通貨の金額で評価する、というやり方をとっています。

　今の100万円と、10年後の110万円、どっちが大きいか、とか、合計いくらか、などというのは、そう簡単な問題ではありません。今の100万円は、タンスにしまっておけば10年後にも100万円ですが（泥棒に入られなければ、デノミがなければ、ですが）、銀行に預けておけば利息がついて105万円くらいにはなっているかもしれません（銀行がつぶれなければ）。株に投資してうまく当てれば200万円なり500万円なりになっているかもしれません（0になっているかもしれませんが）。
　そんなことでは話が前に進まないので、ここではエイヤっとばかりに一定の利率iを決め、

$$
\begin{array}{rl}
\text{今の} & 100\text{万円} \\
1\text{年後の} & 100\text{万円} \times (1+i) \\
2\text{年後の} & 100\text{万円} \times (1+i)^2 \\
\vdots & \\
n\text{年後の} & 100\text{万円} \times (1+i)^n
\end{array}
$$

が全て同じ評価額だ、と決めてしまいます。
　タンスに預金するか、銀行に預けるか、株に投資するか、とか、泥棒に入られるか、株が値上がりするか値下がりするか、などの様々な可能性、チャンス、リスクを全部ひっくるめてiの中におしこめてしまうわけです。

　そうすると、時点の異なるお金の出入りを全て統一した単位で評価することができます。単位が同じになったら、もう、足し算でも引き算でも大小比較でも何で

もできます。

このような考え方を、time value of Money（直訳するとお金の時間価値）といいます。

ここで基準とする時点をいつにするか、ということになるのですが、通常は、現在を基準にするか、あるいは過去の適当な時点を基準にします。

たとえば今を基準にする、と考えると

$$\begin{array}{rl}
\text{今の} & 100\text{万円はそのまま}100\text{万円} \\
1\text{年後の} & 100\text{万円}\times(1+i)\text{が今の}100\text{万円と同じだから} \\
1\text{年後の} & 100\text{万円は今の}\dfrac{100\text{万円}}{(1+i)}\text{と同じ} \\
2\text{年後の} & 100\text{万円}\times(1+i)^2\text{が今の}100\text{万円と同じだから} \\
2\text{年後の} & 100\text{万円は今の}\dfrac{100\text{万円}}{(1+i)^2}\text{と同じ} \\
\vdots &
\end{array}$$

という具合になります。

ここで前に使った $v=\dfrac{1}{(1+i)}$ を使うと

$$\begin{array}{rl}
1\text{年後の} & 100\text{万円}=\text{今の}100\text{万円}\times v \\
2\text{年後の} & 100\text{万円}=\text{今の}100\text{万円}\times v^2 \\
\vdots & \\
n\text{年後の} & 100\text{万円}=\text{今の}100\text{万円}\times v^n
\end{array}$$

という具合になります。

どうですか、$(1+i)$ と書くより v の方がすっきりしていませんか。割り算より掛け算の方がすっきりしていませんか。さらに、現在のお金を将来の時点で評価すると $(1+i)^n$ を掛けることになって、結果が大きくなってしまうのですが、将来のお金を現在であるいは過去の時点で評価すると $(1+i)^n$ で割るあるいは v^n を掛けることになり、結果が小さくなります。計算は数字が小さい方がやりやすいので、いずれにしても、現在あるいは過去の時点で評価することにして、また $1/(1+i)$ の代わりに $\times v$ で表現する、というのはなかなか頭のいいやり方です。

このようにして、異なる時点でのお金の出入り（キャッシュフロー）を、ある時点での評価に変えてしまうことで、一時点での出入り、ということになります。そうなったら、出の合計と入の合計の差をとることによって、キャッシュフロー全体の評価額を計算することができます。

これから以降の話は、保険料を計算するにしても、責任準備金を計算するにしても、全てこのキャッシュフローの評価の計算、あるいは二つのキャッシュフローの評価額を等しいとしておいて、そのキャッシュフローの中の変数を計算する、ということになります。

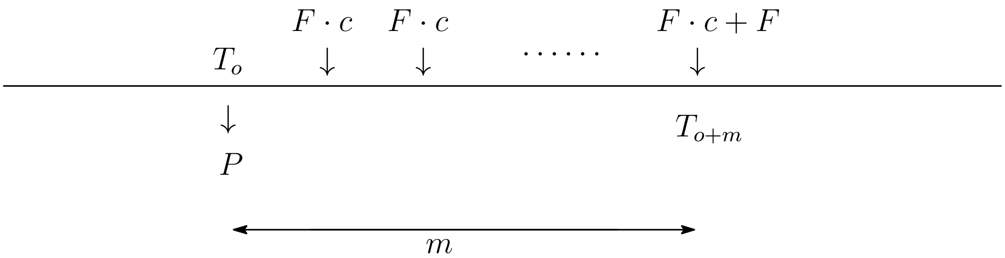
保険料や責任準備金の計算には、死亡率（を使う）計算が必要になるのですが、まずは死亡率（を使う）計算を使わない金利（だけの）計算の説明をしましょう

[確定利付債券]

最初は手始めに、確定利付債券です。債券の額面を F、クーポン（利子）を c、発行から満期償還までの期間を n、価格を P、債券を買ってから満期償還までの期間を m とします。

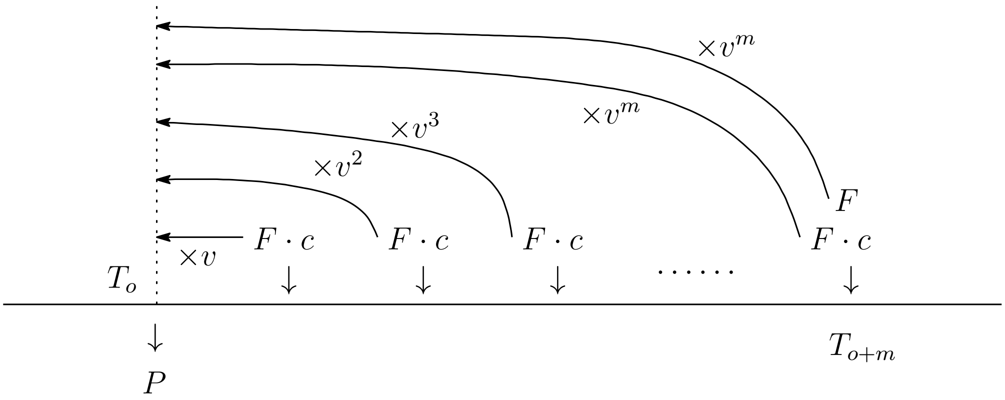
クーポンというのは債券に対して定期的（毎年あるいは半年ごと）に $F \times c$ だけの利息が払われる、というその利息です。簡単のため、クーポンの支払いは年 1 回、年末に行われる、とします。

言葉だとわかりにくいので、次のような図で考えてみましょう。



水平線の上から水平線に向かっての下向き矢印は入ってくるお金、水平線の下から水平線から離れる方向の下向き矢印は出ていくお金を表すものとします。上の図は最初に P を払って債券を買い、1 年後から毎年 $F \cdot c$ のクーポン利息が入ってきて、m 年後にはクーポン利息の $F \cdot c$ と満期償還の F が入ってくる、ということを表し、これは、その債券を買った人の立場から見たキャッシュフローになります。（もちろん、債券を売った人、債券を発行してクーポン利息を払ったり、満期償還金を払ったりする人の立場では矢印の上下が違ってきます。）

以上のようなキャッシュフローを、たとえば債券を買った時点 T_o で評価すると、それは以下のようになります。



債券を買った時	$-P \cdot v^0 = -P$	**（マイナスは、お金が出ていったことを示します。v^0 は基準とする T_o との時間差が 0 だから、現価計算の割引はないことを示します。）**
1 年後のクーポン収入	$F \cdot c \cdot v^1$	**（こんどは収入なのでプラスです。v^1 は、その収入が基準とする T_o から 1 年後という意味です。）**
2 年後のクーポン収入	$F \cdot c \cdot v^2$	
3 年後のクーポン収入	$F \cdot c \cdot v^3$	
⋮		
⋮		
m 年後のクーポン収入	$F \cdot c \cdot v^m$	
債券の償還	$F \cdot v^m$	**（m 年後にはクーポンだけでなく、額面の金額が償還される）**

これを整理すると、

（A）	**債券を買ったことによる支出**	$-P$
（B）	**クーポン収入**	$F \cdot c \cdot v + F \cdot c \cdot v^2 + F \cdot c \cdot v^3 + \cdots + F \cdot c \cdot v^m$
（C）	**額面の償還**	$F \cdot v^m$

このように整理すると、（A）+（B）+（C）が正であれば、儲かった、すなわち買うのに払ったお金の値うちより、後から入ってくるお金の値うちの方が大きいから、その差の分だけ儲かった、ということになります。逆に（A）+（B）+（C）が負の場合には後から入ってくるお金の全体より高い金額で債券を買ってしまったので、損したということになります。

ふつうは売る方はできるだけ高く売ろうとし、買う方はできるだけ安く買おうとしますので、仮に評価のための利率 i が売り手と買い手で同じだとすると、損も得もないところの値段で売買が成立する、ということになります。

すなわち（A）$+$（B）$+$（C）$= 0$ となるような P がその売買の値段になる、というわけです。（A）は $-P$ で簡単ですが（B）をもう少し整理して簡単にしておきましょう。

$$
\begin{aligned}
\text{（B）} &= F \cdot c \cdot v + F \cdot c \cdot v^2 + \cdots + F \cdot c \cdot v^m \\
&= F \cdot c \cdot \left(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m\right) \\
&= F \cdot c \cdot v \cdot \frac{1 - v^m}{1 - v} = F \cdot c \cdot \frac{1 - v^m}{i}
\end{aligned}
$$

となります。上の式で 1 行目から 2 行目は、$F \cdot c$ でくくった、ということで問題ないですね。2 行目から 3 行目への変形は、等比数列の和というやつですが、次のように示します。

$$A = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m$$

とします。これに v を掛けると、

$$v \cdot A = v^2 + v^3 + \cdots + v^m + v^{m+1}$$

この二式の上から下を引くと、

$$
\begin{aligned}
A - v \cdot A &= v - v^2 + v^2 - v^3 + v^3 + \cdots - v^m + v^m - v^{m+1} \\
&= v - v^{m+1} \\
&= v(1 - v^m)
\end{aligned}
$$

$A - v \cdot A = A(1 - v)$ ですから、上の両辺を $(1 - v)$ で割って

$$A = \frac{v \cdot (1 - v^m)}{1 - v}$$

というわけです。

これは最も シンプルな例ですが、保険数学ではこのように「ずらして相殺」することにより計算式を簡単にするテクニックがよくつかわれます。

この式の変形の流れをしっかり頭に入れておいてください。

さて、

$$\text{（B）} = F \cdot c \cdot v \frac{1 - v^m}{1 - v} = F \cdot c \cdot \frac{1 - v^m}{i}$$

の最後の $=$ は、$\dfrac{v}{1 - v} = \dfrac{1}{i}$ という等式から出てくるのですが、この等式が成り立つことは、簡単ですから自分で確かめてみてください。

さて上の二つの式の形、比較すると、$F \cdot c \cdot \dfrac{1-v^m}{i}$ の方が $F \cdot c \cdot v\dfrac{1-v^m}{1-v}$ よりシンプルな形をしています。一方、$F \cdot c \cdot \dfrac{1-v^m}{i}$ は、金利に関するパラメータを i と v と 2 つ使っていますが $F \cdot c \cdot v\dfrac{1-v^m}{1-v}$ の方は、v ひとつだけで統一しています。

これは好みの問題ですが、保険数学では i,d,v をあれこれ使うより、全て v で統一する方が扱いやすいと考え、$F \cdot c \cdot v\dfrac{1-v^m}{1-v}$ の方の式が使われます。

とはいえ、もし生命保険数理の試験を受けるつもりがあるなら、いつでも自由に i,d,v の間を行き来して、どんな式でも扱えるようにしておくことが必要になります。

以上で

$$
\begin{aligned}
\text{(A)} &= -P \\
\text{(B)} &= F \cdot c \cdot v \cdot \frac{1-v^m}{1-v} \\
\text{(C)} &= F \cdot v^m
\end{aligned}
$$

となりました。

（A）$+$（B）$+$（C）$=0$ となるような $P=P_*$ を求めると

$$
\begin{aligned}
-P_* &+ F \cdot c \cdot v \cdot \frac{1-v^m}{1-v} + F \cdot v^m = 0 \\
P_* &= F \cdot c \cdot v \cdot \frac{1-v^m}{1-v} + F \cdot v^m \\
&= F\left\{\frac{v \cdot (1-v^m)}{1-v}c + v^m\right\}
\end{aligned}
$$

となります。

すなわち、買い手がキャッシュフローを、利率 i で評価するとすると、将来のクーポン収入と額面の償還額の合計が P_* となるので、買値 P が P_* より安ければお買い得、P_* より高ければ損な買い物、ということになるわけです。

キャッシュフローを、そのままの金額で評価すると、クーポン収入は $F \cdot c \cdot m$ となり、額面の償還は F になりますから、合計で $F \cdot c \cdot m + F = F(1 + c \cdot m)$ となりますが、利率 i を使って評価することにより、

$$
P_* = F\left(v^m + \frac{v(1-v^m)}{1-v}c\right)
$$

と、より正確に評価することができるようになったわけです。

以上のように、キャッシュフローを i あるいは v を使って、ある時点での評価額に換算する評価方法を現価計算といい、その評価額を現価（現在価格を略して現

価）といいます。

原価とは全く別物ですが、読みは同じく（げんか）です。

　たとえば上の式は、クーポン収入と満期償還額の、債券を購入した時点での現価は、

$$F\left\{v^m + \frac{v(1-v^m)}{1-v}c\right\}$$

です、という具合にいます。

［評価する時点を変える］

　現価というのは、いつの時点で評価するかによって、1 年違えば $(1+i)$ 倍あるいは v 倍違ってきますので、常にいつの現価なのか、現価を計算する基準となる時はいつか、はっきりさせることが必要です。

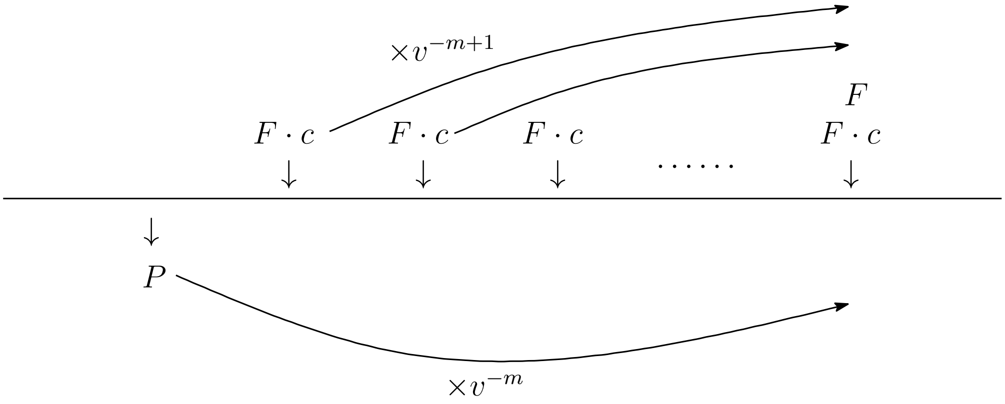
　通常、その時点が明らかな時はそれをはしょってしまうこともありますが、慣れるまでは常に「どの時点で」というのを意識するようにしましょう。

　さて、これまでは債券を買う時点での現価計算をしましたが、今度は債券の満期償還の時点で現価計算したらどうなるか、見てみましょう。

債券を買った時に払った P は、m 年後には $P \cdot v^{-m}$ となります。
　さっきまでは、将来のキャッシュの出入りを過去にさかのぼって計算していたので、v の何乗という形になっていたのですが、今度は今のキャッシュの出入りを将来の時点で評価するので、v のマイナス何乗を掛けるという形になります。$v = \dfrac{1}{1+i}$ ですから、

$$\begin{aligned} v^k &= (1+i)^{-k} \\ v^{-k} &= (1+i)^k \end{aligned}$$

となりますが、$(1+i)$ より v の方が単純なので、マイナス何乗も含めて全て v で統一することにしましょう。



債券を買った時	$-P \cdot v^{-m}$
1 年後のクーポン収入	$F \cdot c \cdot v^{-m+1}$
2 年後のクーポン収入	$F \cdot c \cdot v^{-m+2}$
$\vdots$	
$\vdots$	
m **年後のクーポン収入**	$F \cdot c \cdot v^0 = F \cdot c$
m **年後の債券の償還**	F

となり、前と同じ（A）,（B）,（C）と同じ意味で $(\mathrm{A})_*$, $(\mathrm{B})_*$, $(\mathrm{C})_*$ **を使うと、**

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A})_* &= -P \cdot v^{-m} \\
(\mathbf{B})_* &= F \cdot c \cdot \left\{ v^{-m+1} + v^{-m+2} + \cdots + v^{-1} + v^0 \right\} \\
(\mathbf{C})_* &= F
\end{aligned}
$$

ここで $(\mathrm{B})_*$ **の｛ ｝の部分は**

$$
\begin{aligned}
& v^{-m+1} + v^{-m+2} + \cdots + v^{-1} + v^0 \\
&\qquad = 1 + v^{-1} + v^{-2} + \cdots + v^{-(m-1)} \\
&\qquad = \frac{1 - v^{-m}}{1 - v^{-1}} \\
&\qquad = \frac{v}{v^m} \cdot \frac{1 - v^m}{1 - v}
\end{aligned}
$$

（2 番目の式から 3 番目の式への変形は、前と同様にずらして引くやり方の応用です、試してみてください。3 番目の式から 4 番目の式への変形は分子分母に v^m **を掛け、** v **を掛け、引き算の左右を逆にする、という変形です。確認してください。）**

となりますから、たしかに

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A})_* &= (\mathbf{A}) \cdot v^{-m} \\
(\mathbf{B})_* &= (\mathbf{B}) \cdot v^{-m} \\
(\mathbf{C})_* &= (\mathbf{C}) \cdot v^{-m}
\end{aligned}
$$

となっています。
P_* を（A）$+$（B）$+$（C）$=0$ となるような P として計算したのですが、

$$
\begin{array}{ll}
 & (\mathrm{A}) \quad + \quad (\mathrm{B}) \quad + \quad (\mathrm{C}) \quad = 0 \\
\text{と} & (\mathrm{A})_* + \quad (\mathrm{B})_* + \quad (\mathrm{C})_* = 0
\end{array}
$$

は同じことですから、　$(\mathrm{A})_* + \quad (\mathrm{B})_* + \quad (\mathrm{C})_* = 0$ となる P として P_* を決めても同じことになります。

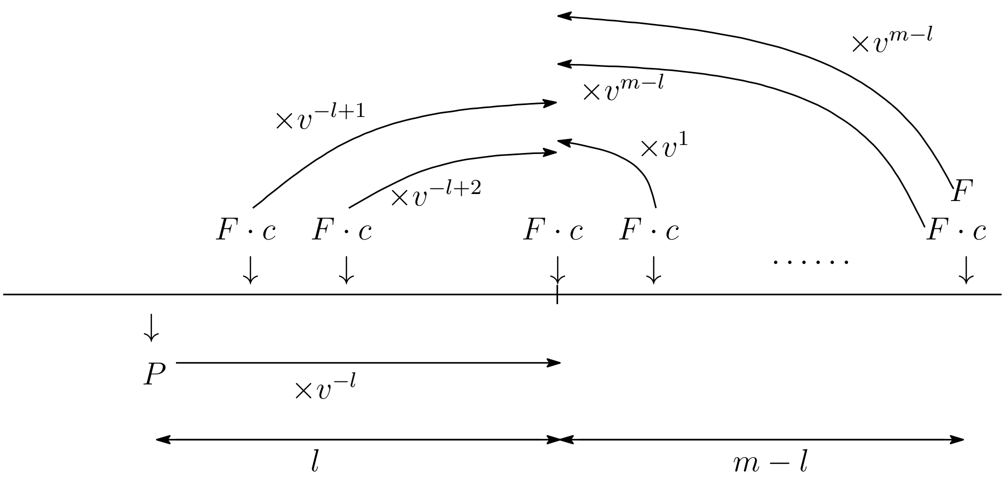
$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A})_* &= -P \cdot v^{-m} \\
(\mathbf{B})_* &= F \cdot c \cdot \frac{v}{v^m} \cdot \frac{1-v^m}{1-v} \\
(\mathbf{C})_* &= F
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
P_* \cdot v^{-m} &= F \left\{ 1 + \frac{v}{v^m} \cdot \frac{1-v^m}{1-v} c \right\} \\
P_* &= F \left\{ v^m + v \cdot \frac{1-v^m}{1-v} c \right\}
\end{aligned}
$$

となり、以前の結果と一致します。

　さて、今度は債券を買ったときから、l 年後（ただし $l < m$）の時点で評価してみましょう。



債券の買い取り	$-P \cdot v^{-l}$
1 年目のクーポン	$F \cdot c \cdot v^{-l+1}$
2 年目のクーポン	$F \cdot c \cdot v^{-l+2}$
$\vdots$	
$\vdots$	
l **年目のクーポン**	$F \cdot c \cdot v^{0} = F \cdot c$
$l+1$ **年目のクーポン**	$F \cdot c \cdot v^{1}$
$l+2$ **年目のクーポン**	$F \cdot c \cdot v^{2}$
$\vdots$	
$\vdots$	
m **年目のクーポン**	$F \cdot c \cdot v^{(m-l)}$
債券の償還	$F \cdot v^{(m-l)}$

(A)$_{**}$	$-P \cdot v^{-l}$
(B)$_{**1}$	$F \cdot c \cdot \left\{ v^{-l+1} + v^{-l+2} + \cdots + v^{0} \right\}$
(B)$_{**2}$	$F \cdot c \cdot \left\{ v^{1} + v^{2} + \cdots + v^{(m-l)} \right\}$
(C)$_{**}$	$F \cdot v^{(m-l)}$

5. 金利計算 V へ