

5. 金利計算 V

キャッシュフローは様々ありますが、その中で典型的なものが 2 つあります。

その 1 つは上で債券が償還される時のように、ある一時点である一定の金額が入ってくる、あるいは出ていくというものです。一定の金額を 1 として、一時点というのを今から n 年後、として、そのキャッシュフローの現在価値を計算すると、上で説明したように、 v^n となります。

これを記号で $A_{\overline{n}|}$ と書くことにします。

(アクチュアリー試験を受験しようとする人に対する注意。この記号は、正統的な保険数学の教科書には入っていないようです。試験の回答でこの記号を使うと減点の対象になるかもしれないので気をつけて下さい。山内さんの本では“歴史的な記号”として紹介されています。)

$A_{\overline{n}|}$: n 年後の金額 1 のキャッシュフローの現在価値。

これがどうして A なのか、残念ながら知りません。

もうひとつ典型的なものが、同じく上の例の債券の利払いのように、一定の期間(たとえば n 年)にわたり、一定の間隔(たとえば 1 年ごと)に一定の金額(上の例ではクーポンの c)が入ってくる、あるいは出ていく、というものです。毎月一定額の給付をもらう(払う)とか、毎月一定額のこづかいをもらう(あげる)とか、毎月一定額の貯金をするとか、毎月一定額のローンの返済をするとか、様々なケースが全てこのタイプのキャッシュフローになります。

今から n 年間、 n 回にわたって毎回金額 1 ずつ入ってくる、あるいは出ていく、というキャッシュフローの現在価値を

$$a_{\overline{n}|}$$

という記号で表します。

ここの a は Annuity (年金) の頭文字です。

日本語で年金というとき、対応する英語は、annuity と pension と 2 つの単語があります。

annuity の方は、文字通り毎年一定のお金が支払われる、という意味の年金です。pension の方は老齢年金とか、勲章の付録の恩給とか、ご褒美の意味の年金です。

ここで議論するのは、ローンの返済なんかを含む年金ですから、当然 annuity の方です。

今から n 年間毎年金額 1 ずつ、といっても、たとえば債券のクーポンだったら、1 回目が 1 年後、2 回目が 2 年後、 n 回目が n 年後、ということになりますが、たとえば積立貯金だったら、今すぐ 1 回目の払込、1 年後に 2 回目、2 年後に 3 回目で $(n-1)$ 年後に n 回目の払込をすますと、 n 年後に払込んだ元利合計が受け取れる、という具合になります。

債券のクーポンのような、1 回目が 1 年後になるようなものを年末払（あるいは期末払）の年金といって、 $a_{\overline{n}|}$ で表すことになっています。

それに対して積立貯金のように今すぐが 1 回目、1 年後には 2 回目となるものを年始払（あるいは期始払）といって、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ で表すことになっています。 a の頭に $\ddot{}$ をつけて区別しています。この $\ddot{}$ は英語ではウムラウトとかダイアレーシスとかダブルドットとかいうようですが、日本ではドンドンとかテンテンとかチョンチョンとかいずれにしても適当な読み方がされています。 $\overline{n|}$ の $|$ の方は、普通「カギ」と読んでいます。英語では angle というようです。

ですから $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ は、私は「エードンドンのエヌのカギ」と読んで「期始払の n 年確定年金の現価」と言います。

「確定年金」というのは、後ほど死亡率が登場した後で、生きている時だけ払う年金 = 生命年金が出てくるのでそれと対比して、生きてようと死んでようと払う（あるいはもらう）年金、という意味で確定年金といえます。

このように $A_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ の記号を決めると、

$$\begin{aligned} A_{\overline{n}|} &= v^n \\ a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \cdots + v^n = v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} \end{aligned}$$

ということがわかりますね。

今の所出てきた記号は、利率に関する i, d, v と $A_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ だけですが、生命保険数学では、今後、山ほどの記号が出てきます。

ある意味この記号の意味と使い方を覚える、というのが生命保険数学だと言ってもいいかもしれません。

一度にたくさんの記号が出てくると、それだけで嫌気がさしてしまうかもしれませんが、少しずつ説明しますので覚えてみてください。一つ一つの記号の意味が分かれば、生命保険数学の一見複雑そうに見える数式は、実はかなり単純明快なことを表現しているんだ、ということがわかります。

逆に説明もなしに一見複雑そうな式を見せられると知らない人は、「アクチュアリーというのは何かえらく難しいことやっているみたいで、我々には到底太刀打ちできない」と敬遠してくれるようです。この敬遠というのは、文字通り、「すごいことをやっていそうな」と尊敬して「できるだけ近づかないようにしよう」と仲間はずれにすることです。

確かにうかつに近づくと、むずかしい議論をふっかけられて、なかなか解放してもらえない、などの被害を受けることもあるようです。

アクチュアリーの方も「遠」の方はあまりうれしくありませんが「敬」がついてくるなら、まあ良しとしようか、というところでしょうか。

使っている式が、見た目と違って実はとても簡単なことだ、とわかってしまって、「敬」の部分がなくなってしまうかもしれない、ということでことさら難しい式を使っている、というわけでもないのですが。

ともあれ、記号を使うと、前の債券の価値の式は

$$\text{債券の価値} = c \cdot a_{\overline{n}|} + F \cdot A_{\overline{n}|}$$

すなわち、クーポン c を毎年受け取る価値と、 n 年後に額面 F の償還を受ける価値の合計、ということになります。

毎年一定額 P を n 年間積立てて、 n 年後に満期金 S を受け取れるようにしよう、と考えたとします。

積立てる金額の現在価値は

$$P \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

n 年後の満期金の現在価値は

$$S \cdot A_{\overline{n}|}$$

だから、これを得るためには

$$S \cdot A_{\overline{n}|} = P \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$P = S \cdot \frac{A_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

ですから、毎年この式で計算される P を積立てればいい、ということになります。

ここでは a の上に $\ddot{}$ がついているのを確認して下さい。

勘の良い人はもうお気づきだと思いますが、このような式の形は実は金利計算だけでなく、生命保険の計算でも同じような形の式が出てくるので、その予告編

のようなものです。

保険数学のやり方というのは、あらかじめ、 $A_{\overline{n}|}$ 、 $a_{\overline{n}|}$ 、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 等を i あるいは v を使って計算しておいて、それとは別に、具体的なキャッシュフローを $A_{\overline{n}|}$ 、 $a_{\overline{n}|}$ 、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ などを使った式の形で表し、その式を解くことによって答えを求める、というものです。

$a_{\overline{n}|}$ 、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ の意味から

$$1 + a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+1}|}$$

$$v \cdot a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

となることを確認しておいて下さい。

$a_{\overline{n}|}$ と $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ は、キャッシュフローのタイミングが1年ずれている、ということで、このような関係式が成立するのはわかりやすいのですが、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ と $A_{\overline{n}|}$ はキャッシュフローからみると全く異なっています。しかしながら、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ と $A_{\overline{n}|}$ の間には

$$1 - A_{\overline{n}|} = (1 - v)\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

という関係式が成立っています。

これは $A_{\overline{n}|}$ と $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ の定義式を見直すとすぐにわかりますが、

これとは別に

$$\begin{aligned}(1 - v)\ddot{a}_{\overline{n}|} &= \ddot{a}_{\overline{n}|} - v \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} \\ &= 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} \\ &\quad - v - v^2 - \dots - v^{n-1} - v^n \\ &= 1 - v^n \\ &= 1 - A_{\overline{n}|}\end{aligned}$$

という形でもみちびけます。 $1 - v = d$ ですから、上の式は

$$A_{\overline{n}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

このように書くと、毎年毎年のキャッシュフローと、1回こっきりのキャッシュフローがこんな関係にある、というのはちょっと不思議な気がしませんか？

これが死亡率が加わって生命保険の式になったら、どんな形になるか、楽しみに。

6. 死亡率 I へ