

7. 死亡率 II

[死亡率の作り方]

ある時点 T における x 歳の人の数を l_x^T としましょう。1 年後は時点が $T + 1$ ですから、 $x + 1$ 歳の人の数は l_{x+1}^{T+1} となります。

ここで、死亡以外には人の出入りがない（行方不明になったり、急にあらわれたりしない）とすると、 T から $T + 1$ までの間に死亡した人の数を d_x^T とかけば、

$$l_x^T - d_x^T = l_{x+1}^{T+1}$$

ということになります。

$$q_x^T = \frac{d_x^T}{l_x^T}$$

とすれば、これがある時点 T で x 歳で生きてた人が、その後 1 年間のうちに死亡する割合を表すことになります。

上の式からわかるように、 l_{x+1}^{T+1} は必ずしも l_{x+1}^T と同じわけではありません。 x 歳の人 が 1 年後に $x + 1$ 歳になって生きている人の数は、1 年前に $x + 1$ 歳だった人の数と同じになる保証はありません。

こんな具合にして $\{q_x^T\}$ が計算できるのですが、 q_x^T だけだと何かと計算が面倒なので、これをつかって l_0 をたとえば 100,000 かなんかにしておいて、

$$d_k = l_k \cdot q_k^T \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$l_{k+1} = l_k - d_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

としてやると、この $\{l_k, d_k, q_k^T\}$ の組が一つの死亡率になる、というわけです。

$$\begin{aligned} q_x^T \text{ は、その 1 年後の } q_x^{T+1} &= \frac{d_x^{T+1}}{l_x^{T+1}} \\ &= \frac{(l_x^{T+1} - l_{x+1}^{T+2})}{l_x^{T+1}} \end{aligned}$$

と同じになるわけではありませんが、ここはエイヤっと、死亡率は毎年それほど大きく変化しない、と考えて、 q_x^T の T をはずしてしまいます。

これでようやく $\{l_x, d_x, q_x\}$ の完成です。

時間の経過とともに変化する数 S_t ($t = 0, 1, 2, \dots$) の表現のしかたとして、

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + \dots + (S_t - S_{t-1}) \\ &= S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} (S_{k+1} - S_k) = S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \Delta S_k \end{aligned}$$

というやり方と、

$$\begin{aligned}
 S_t &= S_0 \times \frac{S_1}{S_0} \times \frac{S_2}{S_1} \times \cdots \times \frac{S_t}{S_{t-1}} \\
 &= S_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} \frac{S_{k+1}}{S_k} \\
 &= S_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} \left(1 + \frac{(S_{k+1} - S_k)}{S_k} \right) \\
 &= S_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} \left(1 + \frac{(\Delta S_k)}{S_k} \right)
 \end{aligned}$$

というやり方の二つがあると説明しました。

金利計算の場合は、エイヤっと

$$\frac{\Delta S_k}{S_k} = i \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

という具合にしてしまったのです。

死亡率の方も同じようにすると、

$$\begin{aligned}
 l_t &= l_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} \left(1 + \frac{(l_{k+1} - l_k)}{l_k} \right) \\
 &= l_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} \left(1 - \frac{d_k}{l_k} \right) \\
 &= l_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_k)
 \end{aligned}$$

となります。ここでさらにもう一度エイヤっとばかりに

$$q_k = q \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

という具合にやってもいいのですが、経験的に死亡率は年齢が大きくなるにつれて、死亡率も大きくなる、ということがわかっていますので、そんな乱暴なこともできません。

となると、

$$l_t = l_0 \times \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_k)$$

で、年がら年中、 $\prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_k)$ の掛け算をくるくるやらなければならなくなります。

やはり、掛け算や割り算より、足し算や引き算の方がよっぽど簡単なので、

$$\prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_k)$$

の代わりに、その結果としての l_t の方を使うことにして、また、

$$l_{t+1} = l_t - d_t$$

$$d_t = l_t - l_{t+1}$$

で、 l_t と d_t の両方を使うことにして、 q_x の方は、必要な時だけ d_x/l_x で計算して戻してやる、ということにします。

もちろん、 l_x, d_x を使うといっても重要なのは q_x ですから、 l_x, d_x の全体を一定数 K 倍した

$$K \cdot l_x, \quad K \cdot d_x$$

を使っても同じことです。

そこで、一般的に利用されている方法は $l_0 = 100,000$ とする、というやり方です。

$l_0 = 1$ としてもいいのですが、そうすると l_t は 0.***** という小数になってしまいます。それより、 $l_t = **, ***, **$ という具合に、ある程度大きな数の方が何かとやりやすい、ということです。

q_x は、上で説明したように、もともとある時点での年齢別の生存数と、その後 1 年間の年齢別死亡数（あるいは 1 年後の生存数）から計算するのですが、理論的に計算することもできます。

最初に死亡率 $\{l_x, d_x, q_x\}$ は $\{l_x\}, \{d_x\}, \{q_x\}$ のどれか 1 組さえ決まれば、残りの二組は計算できると説明しました。

そこで、どれか 1 つを理論的にある式で決めておいて、残りを計算でだしても、生命表が出来上がることになります。

[ド・モルガンの死亡率]

その意味で有名な例が、ド・モルガンの生命表です。
これは

$$d_x = 1 \quad (x = 0 \cdots \omega)$$

$$\omega = 85$$

とする、というもので、

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{86} = 0 \\ l_{85} = d_{85} = 1 \\ l_{84} = l_{85} + d_{84} = 1 + 1 = 2 \\ l_{83} = l_{84} + d_{83} = 2 + 1 = 3 \\ \vdots \\ l_t = l_{t+1} + d_t = (86 - t - 1) + 1 = 86 - t \\ \vdots \\ l_0 = 86 \end{array} \right.$$

書き換えると

$$\begin{aligned} l_t &= 86 - t \\ d_t &= 1 \\ q_t &= \frac{1}{(86 - t)} \end{aligned}$$

となるものです。

t が 0 から 85 に向かってだんだん大きくなると、 $86 - t$ は逆に小さくなるので、 $q_t = 1/(86 - t)$ は、またその逆でだんだん大きくなります。

これは年齢が上がるにつれて死亡率が大きくなるということで、死亡率としてはおあつらえ向きのものになります。

この死亡率は、かなり人工的なもの、と思われるかもしれませんが実はそうでもありません。この死亡率のポイントは、 d_t が一定値になる、即ち、 l_t が t に関して一次式になる、というところです。

生命表 $\{l_x, d_x, q_x\}$ が与えられたら、 $\{l_x\}$ のグラフを書くと、なめらかな右下がりの曲線になります。これを、適当な区間について、直線で近似してやると、その近似された l_x というのは直線ですから、実質的に上で扱ったのと同様な、 $d_x =$ 一定、という死亡率になります。

オランダ人で世界最初の総理大臣といわれている人で、ヨハン・デ・ヴィットという人がいます。この人は最後は不幸にも民衆に文字通り吊るし上げを食って縛り首になってしまったのですが、この人が予定利率と死亡率にもとづく年金の計算をはじめて行なった、ということで、世界最初のアクチュアリーということになっています（その当時はまだアクチュアリーという言葉はなかったのですが）。

その世界最初のアクチュアリーが使った死亡率も、何歳から何歳までは d_x はいくつ、何歳から何歳までは d_x はいくつ、という具合に、 l_x を折れ線とするものだったようです。

折れ線を構成するそれぞれの直線は、 $d_x = \text{一定}$ という形をしています。こういうわけで、 $d_x = \text{一定}$ という死亡率にはなかなか重要な死亡率の例、となります。

これから死亡率を使っただけのいろいろな計算式が出てきます。たとえば、ド・モルガン流の死亡率だったらこの計算式はどうなるんだろう、と考えてみると、いい練習問題になると思います。

[平均余命 $\{e_x\}$]

さて、生命表には普通 $\{l_x, d_x, q_x\}$ のほかにもいくつかおまけの系列が追加されていることがあります。そのうち、いちばんよく追加されているのが $\{e_x\}$ というものです。これは、平均余命というもので、英語では life expectancy といいます。この expectancy から e の記号がとられたんだと思います。expectancy は期待値のことで、平均値のことです。

平均余命というのは、平均してあと何年生きられるか、ということです。
 x 歳の人 l_x 人のうち、

1 年以内に死ぬのは	d_x	人
1 年をこえて 2 年以内に死ぬのは	d_{x+1}	人
⋮		
t 年をこえて $(t+1)$ 年以内に死ぬのは	d_{x+t}	人

ですから、 t 年をこえて $(t+1)$ 年以内に死ぬ d_{x+t} 人は、平均してあと $(t+1/2)$ 年生きる、と考えたと

$$e_x = \frac{\frac{1}{2}d_x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot d_{x+1} + \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot d_{x+2} + \cdots + \left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot d_{x+t} + \cdots}{l_x}$$

ということになります。

これが平均余命の 1 つの定義式です。
 上の式の分子の方をちょっといじってみましょう。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}d_x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot d_{x+1} + \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot d_{x+2} + \cdots + \left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot d_{x+t} + \cdots \\
= & \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}d_{x+1} + \frac{1}{2}d_{x+2} + \cdots + \frac{1}{2}d_{x+t} + \cdots \\
& \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad + \\
& \qquad \qquad \qquad d_{x+1} \qquad \qquad d_{x+2} \qquad \qquad d_{x+t} \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad + \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad d_{x+2} \qquad \qquad d_{x+t} \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad d_{x+t}
\end{aligned}$$

l_x と d_x は

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

$$l_x = l_{x+1} + d_x$$

という関係になっていますから、

$$l_{\omega+1} = 0$$

$$l_{\omega} = l_{\omega+1} + d_{\omega} = d_{\omega}$$

$$l_{\omega-1} = l_{\omega} + d_{\omega-1} = d_{\omega} + d_{\omega-1}$$

$$l_{\omega-2} = l_{\omega-1} + d_{\omega-2} = d_{\omega} + d_{\omega-1} + d_{\omega-2}$$

$$\vdots$$

$$l_t = l_{t+1} + d_t = d_{\omega} + d_{\omega-1} + \cdots + d_t = \sum_{k=t}^{\omega} d_k$$

という関係が成立っています。

この $l_t = \sum_{k=t}^{\omega} d_k$

という式は、なかなか重宝な式なので、覚えておくと役に立ちます。

この式の意味は「人はいつか必ず一度だけ死ぬ」ということを表しているだけのことですが、この言葉がこんな式に翻訳される、というのもちょっと面白い

ですか。

さて、これを使って、さっきの平均余命の式の分子の方に戻しましょう。式のそれぞれの項を $l_x, l_{x+1} \cdots$ で置き換えれば
平均余命の分子

$$= \frac{1}{2}l_x + (l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{x+t} \cdots + \cdots + l_{\omega})$$

となるのがわかりますね。そこで、

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{e}_x &= \frac{\left\{ \frac{1}{2}l_x + (l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega}) \right\}}{l_x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega})}{l_x} \\ &= \frac{(l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega})}{l_x} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

というようにも計算することができる、ということです。

8. 死亡率 III へ