

9. 死亡率IV

[生命保険と死亡率]

さて、生命保険では、加入者がどのように死亡し、または死亡しないか、を計算して保険料を計算し、また、責任準備金等を計算します。

その際、予定死亡率を使って計算するのですが、そのやり方は次のようなものです。

たとえば x 歳の人が n 人加入したとします。すると、1 年間に $n \cdot q_x$ 人が死亡し、 $n(1 - q_x)$ 人が生き残る、と考えます。次の 1 年間には残った $n \cdot (1 - q_x)$ 人のうち $n \cdot (1 - q_x) \cdot q_{x+1}$ 人が死亡し、 $n \cdot (1 - q_x)(1 - q_{x+1})$ 人が生き残る、と考え、以下、同様に計算します。

q_x というのはかなり小さな数ですから、 $n \cdot q_x$ とか $n(1 - q_x)$ とかは、そのままでは整数にならず、小数点以下の端数のある数になります。現実には人数に 0.34 人などというものはあり得ないのですが、計算上は、端数処理をしないで、小数点以下の端数ある人数で上記の計算をする、というのが生命保険数学のやり方です。

このようにする理由として、通常は次のように考えます。 x 歳の人死亡率が q_x ということは、 x 歳の人が 1 年間に死亡する確率は q_x 、1 年後に生き残る確率は $(1 - q_x)$ 。だから、 x 歳の人が n 人いたら、1 年間に死亡する人数の期待値は $n \cdot q_x$ 、1 年後に生き残る人の期待値は $n(1 - q_x)$ となる。

しかし、 x 歳の人死亡率が q_x というのは、必ずしも x 歳の人が 1 年間に死亡する確率が q_x 、ということではありません。

死亡率というのは、もともと比率ですから、 x 歳の人死亡率が q_x というのは、 x 歳の人が N 人いて、そのうち、1 年後までに死亡する人が D 人だとすると、 $D/N = q_x$ だ、という意味です。

この比率をいきなりことわりもなく確率に変えてしまう、というのが一般的なやり方です。

もう少し丁寧にやると、こんな具合になります。

x 歳の人が N 人いて、そのうち、1 年後までに死亡する人が D 人、1 年後まで生き残る人が $(N - D)$ 人、それで D 人と N 人の比 $D/N = q_x$ だとします。

そのような x 歳の人の中から、1 人選び出したとします。その人は上の D 人のうちの 1 人かもしれないし、 $(N - D)$ 人のうちの 1 人かもしれません。1 年たってしまえば、その人が D 人の中の 1 人か $(N - D)$ 人の中の 1 人かははっきりするのですが、今の時点では全く判断のしようがないとします。その 1 人の選び方に何の

恣意性もないとすると、 D 人のうちの 1 人が選ばれる確率は $D/N = q_x$ 、 $(N - D)$ 人のうちの 1 人が選ばれる確率は $(N - D)/N = 1 - q_x$ 、ということになります。

これが 2 人になるとどうなるかというと、 D 人のうちの 2 人が選ばれる確率は $(D/N) \cdot (D - 1)/(N - 1)$ 、 D 人から 1 人、 $N - D$ から 1 人、となる確率は、 $(D/N) \cdot (N - D)/(N - 1) + ((N - D)/N) \cdot (D/(N - 1))$ 、 $(N - D)$ 人のうちの 2 人、となる確率は、 $((N - D)/N) \cdot ((N - D - 1)/(N - 1))$ となります。

死亡率を確率と考えると、2 人の人がいて、そのそれぞれの人が 1 年間に死亡する確率を q_x 、死亡しない確率を $(1 - q_x)$ とすると、

$$\begin{aligned} \text{1 年間に 2 人とも死亡する確率は} & q_x \cdot q_x \\ \text{1 人死亡してもう 1 人は死亡しない確率は} & q_x(1 - q_x) + (1 - q_x)q_x \\ \text{2 人とも死亡しない確率は} & (1 - q_x)(1 - q_x) \end{aligned}$$

ということになります。

比率の考え方と比較すると、

2 人とも死亡する確率

$$\text{比率の考え方} \quad \frac{D}{N} \cdot \frac{D - 1}{N - 1}$$

$$\text{確率の考え方} \quad q_x \cdot q_x = \frac{D}{N} \cdot \frac{D}{N}$$

1 人死亡して、1 人死亡しない確率

$$\text{比率の考え方} \quad \frac{D}{N} \cdot \frac{N - D}{N - 1} + \frac{N - D}{N} \cdot \frac{D}{N - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{確率の考え方} & q_x \cdot (1 - q_x) + (1 - q_x) \cdot q_x \\ &= \frac{D}{N} \cdot \frac{N - D}{N} + \frac{N - D}{N} \cdot \frac{D}{N} \end{aligned}$$

2 人とも死亡しない確率

$$\text{比率の考え方} \quad \frac{N - D}{N} \cdot \frac{N - D - 1}{N - 1}$$

$$\text{確率の考え方} \quad (1 - q_x) \cdot (1 - q_x) = \frac{N - D}{N} \cdot \frac{N - D}{N}$$

という具合で、分母や分子に -1 があったりなかったりする分、ちょっとだけ違ってきます。

確率論では、上の q_x を使う計算方式を 2 項分布、 D, N を使う計算方式を超幾何分布というので、もし興味があったら勉強してみてください。

とはいえ、 N が十分大きければその差はほとんど無視できることになりますので、生命保険の計算では $D/N, (D-1)/(N-1)$ などの計算をしないで、 q_x で統一してしまっています。これでやれば、死亡や生存の計算は、 N や $D, (N-1)$ や $(D-1), (N-2), (D-2) \cdots$ を使うかわりに、 q_x と $(1-q_x)$ だけで全て解決できるので、式がとても簡単になります。

[大数の法則]

さて、 q_x で計算するといっても、たとえば1年間に死亡する確率 q_x の人が n 人いたとして、1年間に死亡する人数が $n \cdot q_x$ になる、ということにはなりません。

n とか q_x とかではわかりにくいと思うので、例としてサイコロを振る場合を考えてみましょう。

サイコロが完璧にできていて、たとえば1の目が出る確率がちょうど $1/6$ になっているとします。このサイコロを6回振って、1の目が出る確率を計算してみてください。 $1/6$ の確率で6回だから $1/6 \times 6 = 1$ 、というのは間違いです。確率の計算をすると、

1の目が1回も出ない確率	0.334898
1の目が1回だけ出る確率	0.401878
2回	0.200939
3回	0.053584
4回	0.008038
5回	0.000643
6回	0.000021

という具合になります。

この6回を60回、600回にすると、

1の目が60回中10回だけ出る確率	0.137013
600回中100回だけ出る確率	0.043664
6000回中1000回だけ出る確率	0.013819

という具合にどんどん小さくなります。

ですが、これをちょうど $1/6$ の回数だけ出る、ということではなく、 $1/6 \pm 1/6$ の10%、すなわち $0.9/6 \sim 1.1/6$ の回数だけ出る、として計算すると、

1 の目が 6 回中、出る回数が 0.9 ~ 1.1 の間に入る確率	0.401878
1 の目が 60 回中 9 ~ 11 回出る確率	0.261571
600 回中 90 ~ 110 回出る確率	0.725535
6000 回中 900 ~ 1100 回出る確率	0.999469

という具合にどんどん 1 に近づいていきます。

このような事情は、確率が $1/6$ でなくても、あるいは回数の幅が $\pm 10\%$ でなくても、どんな場合でも成り立ちます。

すなわち、あることが起こる確率を p (これは probability の p です) として、 n 回試してそれが起こる回数がちょうど $n \cdot p$ になる確率は、 n が大きくなるにつれてどんどん小さくなります。

しかし、 δ (デルタ) を小さな正の数として、起こる数が $n \cdot p \cdot (1 - \delta)$ と $n \cdot p \cdot (1 + \delta)$ の間に入る確率を計算すると、 n が大きくなるとこの確率はいくらかでも 1 に近づき、すなわち、いくらかでも確実に $n \cdot p \cdot (1 - \delta)$ と $n \cdot p \cdot (1 + \delta)$ の間におさまる、ということがいえます。これを大数の法則、といいます。もっと詳しく知りたい場合は、確率論の教科書を読んでください。

いずれにしても、こんな事情があるので、 N が十分大きければ、1 年間の死亡率 q_x の人が N 人いたとき、1 年間に死亡する人の数 D と N との比率 D/N は、ほとんど q_x と同じになる、ということになるわけです。

そこで、生命保険数学ではエイヤっとばかりに

$$D = N \cdot q_x$$

と決めてしまうわけです。

このような考え方で生命保険事業が始まって、250 年、今のところこの考え方を訂正しなければならない事態は発生していないようです。そこで安心して、1 年間の死亡率 q_x の人が N 人いたとき、1 年間に死亡する人の数はぴったり $N \cdot q_x$ 人、生き残るのはぴったり $N \cdot (1 - q_x)$ 人、ということにして、計算することになっています。

これをまとめると、生命保険数学では死亡率 q_x というのは、もともと比率なのだが、計算を簡単にするため、確率だ、とみなして計算することにし、とはいえ確率計算も面倒なので大数の法則を使って、また比率に直して計算する。2 回も横着をしているのだけれど、それで実際何の問題も生じなさそうなので、このやり方を続ける、ということです。

なお、上で $n \cdot p \cdot (1 - \delta)$ と $n \cdot p \cdot (1 + \delta)$ の間、という言い方に注意して下さい。同じようなもんだろう、と思って、 k を適当な正の数だとして $n \cdot p - k$ と $n \cdot p + k$ という具合にしてしまうと、今度は起こる数が $n \cdot p - k$ と $n \cdot p + k$ の間に入る確

率は n を大きくすると、いくらでも 0 に近づく、ということになってしまいます。

10. 死亡率こみのキャッシュフロー I へ