10.　死亡率こみのキャッシュフローI

　さて、金利計算と死亡率計算の準備ができたので、いよいよこの両方を合わせたとき、どうなるか考えてみましょう。
　いきなり、生命保険の計算に入る前に、まずは金利計算の所で行った、基本的なキャッシュフローの現価の計算が死亡率を加えることによりどうなるか見てみましょう。

　金利計算の所で考えた基本的なキャッシュフローは、

① n 年後に 1 入る、あるいは出るキャッシュフロー
② n 年間毎年 1 だけ入る、あるいは出るキャッシュフロー

でした。

　これに死亡率を入れると

①－１ n 年後に生きていたら 1 入る、あるいは出るキャッシュフロー
①－２ n 年後に死んでたら 1 入る、あるいは出るキャッシュフロー
①－３ n 年後に死んだら 1 入る、あるいは出るキャッシュフロー
②－１ n 年間生きていたら、毎年 1 だけ入る、あるいは出るキャッシュフロー
②－２ n 年間、毎年その年に死んだら 1 だけ入る、あるいは出るキャッシュフロー
②－３ n 年間、毎年死んでたら 1 だけ入る、あるいは出るキャッシュフロー

という具合になります。
他にもいろいろバリエーションは考えられますが、都合により、この①－１、②－１、②－２だけをとりあげます。
　これは、すぐわかるように①－１は養老保険の満期保険金のモデル、②－１は生命年金あるいは、保険料支払のモデル、②－２は定期保険の死亡保険金のモデル、になるからです。もちろん、この 3 つ以外のキャッシュフローについても計算することができますが、とりあえず先を急ぐためにこの 3 つに限定します。
　以後、金利計算の現価率を v、死亡率を $\{q_x\}$ とします。

　まず、①－１ですが、
今、生きている x 歳の人が n 年後に生きている確率は、死亡率の確率モデルによると、

$$(1-q_x)\cdot(1-q_{x+1})\cdot(1-q_{x+2})\cdot\cdots\cdot(1-q_{x+n-1})$$

です。これに対する 1 のキャッシュフローの現在価値は、n 年分の現価割引ですか

ら、

①－１のキャッシュフローの現価

$$= (1 - q_x) \cdot (1 - q_{x+1}) \cdot \cdots \cdot (1 - q_{x+n-1}) \cdot v^n$$

これを生命保険数学では、$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ と書くことになっています。

アクチュアリーの国際会議で決まった統一的な記号ですから、世界中どこに行っても通用します（相手が知っていれば）。

これは金利計算で使った $A_{\overline{n|}}$ とくらべると $\overline{n|}$ の前に $x:$ を追加し、$\overline{n|}$ の上に 1 を追加した形になっています。

$\overline{n|}$ は n 年間という意味で、$_{x:\overline{n|}}$ の $\overline{n|}$ 上の 1 は、死ぬ前に n 年たつ、すなわち n 年後に、まだ生きている、ということを示します。

もう一度書くと

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = (1 - q_x) \cdot (1 - q_{x+1}) \cdot \cdots \cdot (1 - q_{x+n-1}) \cdot v^n$$

です。

次に②－１のキャッシュフローの現価ですが、金利計算のときと同様、n 年間の各年の年始で考えるのか、年末で考えるのかで、2 通りのキャッシュフローができます。

生命保険では、年始ベースの方が使い道が多いので、こちらを使うと、

②－１：今、x 歳で生きている人が、今後 n 年間毎年、年始に生きている限り
1 出る、あるいは入るキャッシュフロー

となり、その現価は、

$$1 + (1 - q_x) \cdot v + (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdot v^2 + \cdots + (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdots (1 - q_{x+n-2}) \cdot v^{n-1}$$

となります。

これを生命保険数学では、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ と書くことになっています。これも国際会議で決まった正式な記号です。これは覚えようとしなくても、今後何度でも繰り返し出てきますので、そのうちイヤでも覚えてしまうと思います。

最後に②－２のキャッシュフローですが、これもキャッシュフローの発生のタイミングで 2 通りのキャッシュフローができます。

まず最初は、

②－２－１：今、x 歳で生きている人が、今後 n 年間のうち、
どこかの年で死んだら、その年の年末に 1 出る、
あるいは入るキャッシュフロー

このキャッシュフローの現在価値は、

1 年目に死ぬ場合：　$q_x \cdot v$
2 年目に死ぬ場合：　$(1-q_x)\cdot q_{x+1}\cdot v^2$
⋮
n 年目に死ぬ場合：　$(1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+n-2})\cdot q_{x+n-1}\cdot v^n$

となります。k 年目に死ぬ、というのは $(k-1)$ 年間生きていて、その次の 1 年に死ぬ、ということなので

$$(1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+k-2})\cdot q_{x+k-1}$$

となり、その年末、というのは k 年後ですから、現価率は v^k となります。

このキャッシュフローの現価の記号は $A^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ と決まっています。
①－１のキャッシュフローの現価の記号とよく似ていますが、1 の位置が $\overline{n|}$ の上ではなく、x の上になっています。この意味合いは、今 x 歳の人が今後 n 年間のうちに、n 年後になる前に死亡する、ということです。
死亡する前に n 年後になるのが ${}_{x:\overline{n|}}^{\quad\;1}$ で、
n 年後になる前に死亡するのが ${}_{x:\overline{n|}}^{\,1}$ です。
この 1 は、どちらが先か、ということを表す記号です。この場合は、選択肢が２つだけ、あれかこれか、どっちが先か、ということなので、使われる記号は 1 だけですが、これが、あれか、それか、これか、どれが最初で次がどれでどれが最後か、なんて場合には、1 だけでなく 2 も使われるようになります。今後、出てくるかもしれないので、お楽しみに。
で、まとめると、

$$\begin{aligned} A^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= q_x\cdot v + (1-q_x)\cdot q_{x+1}\cdot v^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+n-2})\cdot q_{x+n-1}\cdot v^n \end{aligned}$$

です。
もうひとつのキャッシュフローは、

②－２－２：今、x 歳で生きている人が、今後 n 年間のうち、
どこかの年で死んだら、その死んだときに即座に

1 出る、あるいは入るキャッシュフロー

です。前の②－２－１との違いは、キャッシュフローの発生のタイミングが、年末まで待つ（②－２－１）か、年末まで待たずに即座に（②－２－２）か、という違いです。

このキャッシュフローの現価を表す記号は、$\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ です。A の上の $^{-}$ が『即座に』を表す記号で、これがついていないと『年末まで待って』ということで②－２－１の $A^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ になります。

この『即座に』というのは正式には『即時払』ということになっています。『年末まで待って』の方は『年末払』といいます。

現在の生命保険では、即時払いの方を使うことが一般的ですが、昔は年末払を使っていた、ということと、理論的に年末払の方がいろいろ面白い式が作れる、ということで両方勉強することになっています。面白い式が作れるというのは、面白い問題が作れる、ということですから、試験を受ける人は特に両方マスターする必要があります。

さて、この即時払いのキャッシュフローの現在価値の計算ですが、たとえば 1 年間に死亡する確率 q_x は決まっているとして、それがいつ死亡するかはわかりません。

②－２－１のときは、いつ死亡しようとおかまいなしに年末まで待って、そこでキャッシュフローが発生したわけですが、今回は即時払いですからそんなわけにはいきません。年始の翌日にキャッシュフローが発生するかもしれないし、年末の前日かもしれません。そこで、ここもエイヤっとばかりに、中をとって、年のちょうど真ん中でキャッシュフローが発生すると考えて、この現在価値を計算します。

そうすると、

$$\begin{aligned}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= q_x \cdot v^{\frac{1}{2}} + (1-q_x)\cdot q_{x+1}\cdot v^{1+\frac{1}{2}} + \cdots \\ &\quad \cdots + (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+n-2})\cdot q_{x+n-1}\cdot v^{n-1+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

となります。ここまでくると、

$$\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = A^{\,1}_{x:\overline{n|}} \cdot v^{-\frac{1}{2}}$$

となるのは、すぐわかりますね。

さて、ここまで、4 つのキャッシュフローの現在価値の計算を書きましたが、$(1-q_x)$ とか q_x とかが山ほど出てきて、面倒だと思いませんでしたか？

　これをもう少し見やすくしてみましょう。

まず①－１の

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = (1-q_x)\cdot(1-q_{x+1})\cdot\dots\cdot(1-q_{x+n-1})\cdot v^n$$

ですが、この両辺に l_x をかけてみましょう。

$$l_x\cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = l_x\cdot(1-q_x)\cdot(1-q_{x+1})\cdot\dots\cdot(1-q_{x+n-1})\cdot v^n$$

ここで
$$\begin{aligned} &l_x(1-q_x) = l_{x+1}\\ &l_{x+1}(1-q_{x+1}) = l_{x+2}\\ &\qquad\vdots\\ &l_{x+n-1}(1-q_{x+n-1}) = l_{x+n}\end{aligned}$$

を使って右辺の方を次々に変形していくと結局のところ、

$$\begin{aligned} l_x\cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} &= l_{x+n}\cdot v^n\\ A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} &= \frac{l_{x+n}\cdot v^n}{l_x}\end{aligned}$$

と、非常にシンプルな形にすることができます。

　式の意味を考えても、$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ は、x 歳の人 1 人分のキャッシュフローを考えるのですが、これを l_x 倍することによって、x 歳の人 l_x 人分で考えると、そのうち n 年後に生き残っているのは l_{x+n} 人なので、1 人当たり 1 のキャッシュフローは総額 l_{x+n} のキャッシュフローになる、それを現価にひきなおすと、$l_{x+n}\cdot v^n$ の現在価値、ということでわかりやすくなります。

　同様に②－１の

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + (1-q_x)\cdot v + (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdot v^2 + \cdots\\ \cdots + (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+n-2})\cdot v^{n-1}\end{aligned}$$

も両辺に l_x をかけ、上と同じように変形すると、

$$\begin{aligned} l_x\ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= l_x + l_{x+1}\cdot v + l_{x+2}\cdot v^2 + \cdots + l_{x+n-1}\cdot v^{n-1}\\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= \frac{l_x + l_{x+1}\cdot v + l_{x+2}\cdot v^2 + \cdots + l_{x+n-1}\cdot v^{n-1}}{l_x}\end{aligned}$$

となります。

②－２－１の

$$\begin{aligned} A^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= q_x \cdot v + (1-q_x)\cdot q_{x+1}\cdot v^2 + \cdots \\ &\cdots + (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+n-2})\cdot q_{x+n-1}\cdot v^n \end{aligned}$$

も両辺に l_x をかけるのですが、ここで、

$$\begin{array}{rl} & l_x \cdot q_x = d_x \\ l_x(1-q_x) = l_{x+1} & l_{x+1}\cdot q_{x+1} = d_{x+1} \\ l_{x+1}(1-q_{x+1}) = l_{x+2} & l_{x+2}\cdot q_{x+2} = d_{x+2} \\ & \vdots \end{array}$$

を使って、次々に置き換えていくと、

$$\begin{aligned} l_x \cdot A^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= d_x\cdot v + d_{x+1}\cdot v^2 + d_{x+2}\cdot v^3 + \cdots d_{x+n-1}\cdot v^n \\ A^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= \frac{(d_x\cdot v + d_{x+1}\cdot v^2 + d_{x+2}\cdot v^3 + \cdots d_{x+n-1}\cdot v^n)}{l_x} \end{aligned}$$

となります。

②－２－２の方も同様に

$$\begin{aligned} l_x \cdot \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= d_x\cdot v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1}\cdot v^{1+\frac{1}{2}} + \cdots d_{x+n-1}\cdot v^{n-1+\frac{1}{2}} \\ \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= \frac{\left(d_x\cdot v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1}\cdot v^{1+\frac{1}{2}} + \cdots d_{x+n-1}\cdot v^{n-1+\frac{1}{2}}\right)}{l_x} \end{aligned}$$

となります。

どうですか、ここまででもかなりすっきりしましたよね。
とはいえまた、$l_{x+k}\cdot v^k$ とか $d_{x+k}\cdot v^k$ とか面倒な掛け算が残ってますね。そこでアクチュアリーはもう一工夫します。

たとえば $l_{x+k}\cdot v^k$ を $\widetilde{l}_k$ と
$d_{x+k}\cdot v^{k+1}$ を $\widetilde{d}_k$ と、置きかえてみましょう。

そうすると①－１は

$$\begin{aligned} l_x \cdot A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1} &= l_{x+n}\cdot v^n \\ \widetilde{l}_0 \cdot A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1} &= \widetilde{l}_n \\ A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1} &= \frac{\widetilde{l}_n}{\widetilde{l}_0} \end{aligned}$$

②－１は

$$
\begin{aligned}
l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots l_{x+n-1} \cdot v^{n-1} \\
\widetilde{l}_0 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \widetilde{l}_0 + \widetilde{l}_1 + \widetilde{l}_2 + \cdots \widetilde{l}_{n-1} \\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\left(\widetilde{l}_0 + \widetilde{l}_1 + \widetilde{l}_2 + \cdots \widetilde{l}_{n-1}\right)}{\widetilde{l}_0}
\end{aligned}
$$

②－２－１は

$$
\begin{aligned}
l_x \cdot A^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + d_{x+2} \cdot v^3 + \cdots d_{x+n-1} \cdot v^n \\
\widetilde{l}_0 \cdot A^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \widetilde{d}_0 + \widetilde{d}_1 + \widetilde{d}_2 + \cdots \widetilde{d}_{n-1} \\
A^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\left(\widetilde{d}_0 + \widetilde{d}_1 + \widetilde{d}_2 + \cdots \widetilde{d}_{n-1}\right)}{\widetilde{l}_0}
\end{aligned}
$$

どうですか、かなりすっきりしましたよね。
でも、この定義だと、たとえば $\widetilde{l}_0$ というのは、それぞれの x について別々に計算しなくてはいけません。

具体的に $\widetilde{l}_{10}$ というのは $x = 30$ とすると

$$\widetilde{l}_{10} = l_{30+10} \cdot v^{10} = l_{40} \cdot v^{10}$$

$x = 50$ **とすると**

$$\widetilde{l}_{10} = l_{50+10} \cdot v^{10} = l_{60} \cdot v^{10}$$

となるので、x のそれぞれに対して別々の $\left\{\widetilde{l}_k\right\}$ を計算しなくちゃならないことになります。

そこでさらに一工夫、

$$\widetilde{\widetilde{l}}_{x+k} = l_{x+k} \cdot v^{x+k}$$

$$\widetilde{\widetilde{d}}_{x+k} = d_{x+k} \cdot v^{x+k+1}$$

という記号を導入してみましょう。
そのココロはというと、

$$\widetilde{l}_k = l_{x+k} \cdot v^k$$

では、k が同じでも x が違うと $\widetilde{l}_k$ が違ってしまうのに対し

$$\widetilde{\widetilde{l}}_{x+k} = l_{x+k} \cdot v^{x+k}$$

だと、$x+k$ が同じであれば x が違っても同じ $\widetilde{\widetilde{l}}_{x+k}$ を使うことができる、ということです。

さて、①−１の

$$l_x \cdot A_{x:\frac{1}{n|}} = l_{x+n} \cdot v^n$$

の両辺に v^x をかけると

$$\begin{aligned} l_x \cdot A_{x:\frac{1}{n|}} \cdot v^x &= l_{x+n} \cdot v^{x+n} \\ \widetilde{\widetilde{l}}_x \cdot A_{x:\frac{1}{n|}} &= \widetilde{\widetilde{l}}_{x+n} \end{aligned}$$

②−１の

$$l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + l_{x+n-1} \cdot v^{n-1}$$

の両辺に v^x をかけると

$$\begin{aligned} l_x \cdot v^x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= l_x \cdot v^x + l_{x+1} \cdot v^{x+1} + l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots + l_{x+n-1} \cdot v^{x+n-1} \\ \widetilde{\widetilde{l}}_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= \widetilde{\widetilde{l}}_x + \widetilde{\widetilde{l}}_{x+1} + \cdots + \widetilde{\widetilde{l}}_{x+n-1} \end{aligned}$$

②−２−１は

$$l_x \cdot A^1_{x:\overline{n|}} = d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \cdots d_{x+n-1} \cdot v^n$$

の両辺に v^x をかけると

$$\begin{aligned} l_x \cdot v^x \cdot A^1_{x:\overline{n|}} &= d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \cdots d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} \\ \widetilde{\widetilde{l}}_x \cdot A^1_{x:\overline{n|}} &= \widetilde{\widetilde{d}}_x + \widetilde{\widetilde{d}}_{x+1} + \cdots + \widetilde{\widetilde{d}}_{x+n-1} \end{aligned}$$

と非常にすっきりします。

　この $\widetilde{\widetilde{l}}_x, \widetilde{\widetilde{d}}_x$ を国際的な標準的な記号としては、D_x, C_x と書くことになっていますので書きなおすと、

$$\begin{aligned} D_x \cdot A_{x:\frac{1}{n|}} &= D_{x+n} \\ D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1} \\ D_x \cdot A^1_{x:\overline{n|}} &= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1} \end{aligned}$$

と、ものすごく見やすくなります。

アクチュアリーは、これでもまだ満足しないでさらに上の

$$D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}$$
$$C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}$$

を簡単にするため、N_x,M_x という記号を

$$\begin{aligned} N_x &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \cdots + D_\omega \\ M_x &= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots + C_\omega \end{aligned}$$

という形で定義します。

そうすると

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \cdots + D_{x+n-1} &= N_x - N_{x+n} \\ C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots + C_{x+n-1} &= M_x - M_{x+n} \end{aligned}$$

となりますので、結局、①－１は

$$\begin{aligned} D_x \cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} &= D_{x+n} \\ A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} &= \frac{D_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

②－１は

$$\begin{aligned} D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1} \\ &= N_x - N_{x+n} \\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x} \end{aligned}$$

②－２－１は

$$\begin{aligned} D_x \cdot A^1_{x:\overline{n|}} &= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1} \\ &= M_x - M_{x+n} \\ A^1_{x:\overline{n|}} &= \frac{(M_x - M_{x+n})}{D_x} \end{aligned}$$

ということになります。

要するに、予定利率 i と予定死亡率 $\{q_x\}$ が与えられたら、予定死亡率 $\{q_x\}$ から、$\{l_x\}$,$\{d_x\}$ を計算し、（あるいは最初から $\{l_x\}$,$\{d_x\}$ の形で予定死亡率が決まっていて）予定利率 i から $v = 1/(1+i)$ を計算し、

$$\begin{aligned} D_x &= l_x \cdot v^x \\ C_x &= d_x \cdot v^{x+1} \end{aligned}$$

で $\{D_x\}$,$\{C_x\}$ を計算し
さらに

$$\begin{aligned} N_x &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \cdots + D_\omega \\ M_x &= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots + C_\omega \end{aligned}$$

で $\{N_x\}$,$\{M_x\}$ を計算する。

ここまでの作業をあらかじめまとめてやってしまっておくと、後の計算は、アッという間にできてしまう、というあんばいです。

なお、上の $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \cdots + D_\omega$ という計算がちょっと面倒くさいと思うかもしれませんが、実際のところ、

$$\begin{aligned} N_\omega &= D_\omega \\ N_{\omega-1} &= D_{\omega-1} + N_\omega \\ N_{\omega-2} &= D_{\omega-2} + N_{\omega-1} \end{aligned}$$

というやり方で ω の方から年齢をさかのぼるように計算すると、簡単に計算することができます。M_x の方も同様です。

この、C,D,M,N がなぜ C,D,M,N なのかはわかりませんが、アルファベットの順番で C が D の 1 つ前なのに対応して M は N の 1 つ前になるようにしているもののようです。

その昔、まだ一人一台のコンピューターを気軽に使えるようになる前は、死亡率 $\{l_x, d_x, q_x\}$ が新しくなると、それに合わせていろいろな i に対して
$\{(1+i)^n, v^n, D_x, C_x, N_x, M_x\}$ をまとめた表が作成され、印刷されて本になっていました。
これさえあれば、たいていの計算は、普通の電卓でアッという間にできてしまう、とても便利なものでした。
あるいはそのもっと前、全ての計算がそろばんと手計算でするしかなかった第二次大戦の前の時代には、この $\{(1+i)^n, v^n, D_x, C_x, N_x, M_x\}$ の 1 セットの表があれば、それだけで一人前のアクチュアリーとして仕事をすることができたようです。$\{(1+i)^n, v^n, D_x, C_x, N_x, M_x\}$ の 1 セットで食いっぱぐれの心配がない、という時代だったようです。

今はもうそんな本は出版されることはありませんが、その代り Excel かなんかで、同じものを作っておけば、なおさら手軽にいろいろな計算が可能となります。

$\{D_x, C_x, N_x, M_x\}$ は計算するとき非常に便利なので、計算基数という名前がついています。

また、生命保険数学ではいろいろな概念や式を表すとき、基本的にこの計算基数を使って表すのが普通です。

D_x は金利計算込みの l_x、C_x は金利計算込みの d_x、$D_x + D_{x+1} \cdots$ という計算を簡単にするのが N_x、$C_x + C_{x+1} \cdots$ という計算を簡単にするのが M_x、ということですが、金利計算の部分が全部、D_x, C_x, N_x, M_x の中に入ってしまうので、とても簡単になります。

たとえば②－１の式の説明として、

今、x 歳の人が D_x 人いたとして、これから n 年間、毎年、生きている人から 1 ずつもらうと考えると

今すぐ	D_x	もらって
1 年後に	D_{x+1}	もらって
2 年後に	D_{x+2}	もらって
n 年目に	D_{x+n-1}	もらうから、

全部で $D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} = N_x - N_{x+n}$ もらうことになる。

これを最初の D_x で割ると 1 人当たりもらうお金の総額は $(N_x - N_{x+n})/D_x$ となり、

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x}$$

という具合です。i とか v とか、現価がどうの、という話は一切出てこないですみます。

さて②－２は②－２－１と②－２－２と両方あるという話をしましたが、途中から②－２－１の方ばかりになってしまいました。②－２－２も同様になっています。

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

の代わりに

$$\overline{C}_x = d_x \cdot v^{x+\frac{1}{2}}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega$$

の代わりに

$$\overline{M}_x = \overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \cdots + \overline{C}_\omega$$

として

$$A_{x:\overline{n|}}^{\,1}=\frac{(M_x-M_{x+n})}{D_x}$$

が

$$\overline{A}_{x:\overline{n|}}^{\,1}=\frac{\left(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}\right)}{D_x}$$

という具合です。

この $\overline{C}_x$,$\overline{M}_x$ の、C と M の上の ¯ は $\overline{A}_{x:\overline{n|}}^{\,1}$ の A の上の ¯ と同じ意味です。
ここまでくると、もう、保険料が計算できます。

11. 保険料の計算 I へ