17.　金利計算VI

　まず最初に転化の話です。
　金利計算は通常年単位で行いますが、これを半年単位とか月単位、週単位、日単位で行なったらどうなるか、考えてみましょう。

　年利率を j として、これを半年単位で複利で計算すると、半年ごとの利率は $j/2$、複利計算した1年後は

$$(1+j/2)^2$$

倍になります。
　これを $1+i$ と等しいとおいた i が現実の1年間の利率となります。

$$1+i=(1+j/2)^2=1+j+j^2/4$$

ですから

$$i=j+j^2/4$$

となります。この j の方を、計算の元となった名目的な1年分の利率として、名称利率といい、i の方を実利率といいます。

月単位の計算だと

$$\begin{aligned} 1+i &= (1+j/12)^{12}=1+j+\frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{j^2}{12^2}+\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2}\cdot\frac{j^3}{12^3}+\cdots \\ i &= j+\frac{11}{2\cdot 12}\cdot j^2+\frac{11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 12^2}\cdot j^3+\cdots \end{aligned}$$

となります。

　半年単位だと複利計算を年2回、月単位だと複利計算を年12回行なうことになるのですが、この複利計算の回数、あるいは回転数を転化回数と呼ぶことになっています。これを m とし、実利率を i とした時の名称利率を $i^{(m)}$ と書くことになっています。
すなわち

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\ &= 1+i^{(m)}+\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{{i^{(m)}}^2}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3\cdot 2}\cdot\frac{{i^{(m)}}^3}{m^3}+\cdots \\ i &= i^{(m)}+\frac{m-1}{2\cdot m}\cdot {i^{(m)}}^2+\frac{(m-1)(m-2)}{6\cdot m^2}\cdot {i^{(m)}}^3+\cdots \end{aligned}$$

ということになります。これで見るように、実利率は名称利率より大きくなります。その大きくなり具合は m を大きくすればするほど大きくなります。
すなわち

$$
\begin{aligned}
1+i_m &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\
1+i_l &= \left(1+\frac{i^{(l)}}{l}\right)^l
\end{aligned}
$$

で $i^{(m)} = i^{(l)}$ ，$m > l$ なら

$$i_m > i_l$$

だ、ということです。
　それでは m をどんどん大きくしていたら、いくらでも大きくなるか、というとそうではありません。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = \exp(j)$$

という式があるので（これは必要だったら、解析学とか微分積分の教科書で確かめてください）名称利率 j を固定して回転数（転化回数）を無限大に大きくした時の実利率は

$$1+i = \exp(j)$$

から

$$i = \exp(j) - 1$$

ということになります。

$$\exp(j) = 1 + j + \frac{j^2}{2} + \frac{j^3}{3!} + \cdots$$

ですから

$$i = j + \frac{j^2}{2} + \frac{j^3}{3\cdot 2} + \cdots$$

となります。

14 ページの式は

$$1+j = \exp(i)$$

となっていて、i と j の役割が逆になってしまいました。その少し前のページから読みなおせば、そこでは i を名称利率、j を実利率として使っていることがわかります。

　この議論はもちろん、割引率についても同様に行えます。名称割引率 $d^{(m)}$ に対する実割引率 d は、

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

となります。

展開すれば

$$d=d^{(m)}-\frac{m-1}{2\cdot m}\cdot d^{(m)^2}+\frac{(m-1)(m-2)}{6\cdot m^2}\cdot d^{(m)^3}-\cdots$$

となり、実割引率は名称割引率より小さくなります。
名称割引率を c、実割引率を d とすると、m をどんどん大きくしていくと、

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{c}{m}\right)^m=\exp\left(-c\right)$$

となりますから、

$$1-d=\exp\left(-c\right)$$

$$d=1-\exp\left(-c\right)$$

ということになります。

$$\exp\left(-c\right)=1-c+\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{3!}+\cdots$$

ですから

$$d=c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3\cdot 2}-\cdots$$

となります。

さて 20 ページで

$$(1+i)(1-d)=1$$

という式を出しましたよね。

これを、使うと、

$$\begin{aligned}(1+i)(1-d) &= \exp(j)\cdot\exp(-c)\\ &= \exp(j-c)\\ &= 1\end{aligned}$$

すなわち

$$j = c$$

となるわけです。

そんなわけで、実利率 i、それに対応する実割引率 d の、転化回数無限大のときの名称利率 j、名称割引率 c は同じ値になってしまいます。それを δ と書きなおして、利力、と言うことにしています。

すなわち

$$\begin{aligned}1+i &= \exp(\delta)\\ 1-d &= \exp(-\delta)\\ (1+i)^k &= \exp(k\delta)\\ (1-d)^k &= \exp(-k\delta)\end{aligned}$$

です。

この○力という言い方は、転化回数を無限大にすることによる瞬間的な利率を年に伸ばした名称○率、という位の意味を持っています。後ほど死亡率の所で、これに対応する死力、という言葉が登場します。

18. 金利計算 VII へ