19.　金利計算 VIII

　金利計算 V で、$\ddot{a}_{\,\overline{n|}}$ と $a_{\,\overline{n|}}$ については説明しました。
　これを n 年後の現価とした $\ddot{S}_{\,\overline{n|}}$,$S_{\,\overline{n|}}$ についても確認しておいてください。

$$\begin{aligned}
\ddot{S}_{\,\overline{n|}} &= (1+i)^n\cdot\ddot{a}_{\,\overline{n|}} = (1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\cdots+(1+i) = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{(1+i)-1}(1+i)\\
S_{\,\overline{n|}} &= (1+i)^n\cdot a_{\,\overline{n|}} = (1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+1 = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}
\end{aligned}$$

を確認したら、二見さんの教科書にある

$$\begin{aligned}
\ddot{S}_{\,\overline{n|}} &= (1+i)S_{\,\overline{n|}}\\
\ddot{S}_{\,\overline{n|}} &= S_{\,\overline{n+1|}}-1\\
S_{\,\overline{n|}} &= \ddot{S}_{\,\overline{n-1|}}+1\\
\ddot{a}_{\,\overline{n|}} &= (1+i)a_{\,\overline{n|}}\\
a_{\,\overline{n|}} &= \ddot{a}_{\,\overline{n+1|}}-1\\
\ddot{a}_{\,\overline{n|}} &= a_{\,\overline{n-1|}}+1\\
v^n\ddot{S}_{\,\overline{n|}} &= \ddot{a}_{\,\overline{n|}}\\
v^nS_{\,\overline{n|}} &= a_{\,\overline{n|}}
\end{aligned}$$

については、計算式で確かめるだけでなく、その左右の式の意味から等式が成り立つことを、言葉で説明して確認しておいてください。

　二見さんの教科書では次に据置年金が出てきます。これについては

$$_{f|}\ddot{a}_{\,\overline{n|}} = v^f\ddot{a}_{\,\overline{n|}}$$

という、f 年後から始まる $\ddot{a}_{\,\overline{n|}}$ という意味と

$$_{f|}\ddot{a}_{\,\overline{n|}} = \ddot{a}_{\,\overline{f+n|}}-\ddot{a}_{\,\overline{f|}}$$

という、$\ddot{a}_{\,\overline{f+n|}}$ を、前半の $\ddot{a}_{\,\overline{f|}}$ と後半の $_{f|}\ddot{a}_{\,\overline{n|}}$ に分割した後半の部分という意味と、両方の見方がある、という点に注目してください。この二つの見方を随時入れ替えることができると、いろんな式の変形が簡単にできます。逆に一方の見方だけに執着してしまうと、大変な計算が必要になってしまいます。

　この二つの見方は後で出てくる生命年金でも同じですから、死亡率の入ってこない確定年金でしっかり慣れておいて、その延長線上で生命年金についても理解するようにしてください。

次に出てくる永久年金ですが、$\ddot{a}_{\,\overline{n}|}$の等比級数の和の式は、$v < 1$ですから$n \to \infty$にした時にも無限大にならないで、一定の数でおさまります。それを$\ddot{a}_{\infty}$と書きます。$\ddot{a}_{\,\overline{n}|}$の方はうまくいきますが、$\ddot{S}_{\,\overline{n}|}$の方は、$n \to \infty$にすると$\ddot{S}_{\,\overline{n}|}$も無限大になってしまうので、$\ddot{a}_{\,\overline{n}|}$,$a_{\,\overline{n}|}$の方だけ$n \to \infty$にして$\ddot{a}_{\infty}$,$a_{\infty}$を定義しています。ここで$\ddot{a}_{\infty}$や$a_{\infty}$には $\overline{}|$ が付かないことに注意してください。

生命年金でも$n \to \infty$にする考え方がありますが、生命年金の場合は年齢のxがあるので、特に∞を書かずに、単に$_{\overline{n}|}$が消えてしまって$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$が$\ddot{a}_x$になることになります。確定年金の場合は$_{\overline{n}|}$を消して単に$\ddot{a}$とか$a$とかでは、ちょっと単純すぎてわかりにくくなってしまうので、わざわざ∞を書くことになっています。

次は、金利計算VIで出てきた転化の確定年金版です。年金は年1回の年金が基本なのですが、現実には、6ヶ月ごと（年2回）の年金とか、2ヶ月ごと（年6回）の年金とか、毎月の年金とかの方が一般的ですから、この分割払の年金については、しっかり理解してください。これが生命年金のほうになると、なおさらです。保険料の支払が生命年金で表されることになりますが、生命保険の場合、現実には月払で保険料が払われることが普通ですから、月払の保険料を計算するために、なおさら分割払（毎月払）の年金になれておく必要があります。

分割の回数をk回としていますが、$k = 12$として、月払のイメージで確認してください。その後$k = 365$として日払にしたり、$k = 6$として2ヶ月払、$k = 2$として半年払と拡張して理解してください。

さて、年金という以上、その年額が基準となります。そのため、k回の分割払の場合、その1回分は、年額の$1/k$となります。分割払の1回分を基準にすべて考える、というアプローチももちろん可能ですが、通常は年額基準で1回分は$1/k$で考えるのが、すでに歴史的に出来上がってしまっている慣習ですから、あまり抵抗しないでとりあえずこれに従ってください。

で、1年をk回に分割して、毎回$1/k$ずつ受け取る期始払n年年金の現価は

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(k)}_{\,\overline{n}|} &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k}v^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k}v^{\frac{2}{k}} + \cdots + \frac{1}{k}v^{\frac{nk-2}{k}} + \frac{1}{k}v^{\frac{nk-1}{k}} \\ &= \frac{1}{k}\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{k}}}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} 1-d &= \left(1-\frac{d^{(k)}}{k}\right)^k \\ (1-d)^{\frac{1}{k}} &= 1-\frac{d^{(k)}}{k} \\ v^{\frac{1}{k}} &= 1-\frac{d^{(k)}}{k} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} 1-v^{\frac{1}{k}} &= \frac{d^{(k)}}{k} \\ \ddot{a}^{(k)}_{\overline{n|}} &= \frac{1-v^n}{d^{(k)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{(k)}_{\overline{n|}} &= \frac{1}{k}v^{\frac{1}{k}}+\frac{1}{k}v^{\frac{2}{k}}+\cdots+\frac{1}{k}v^{\frac{nk}{k}} \\ &= \frac{v^{\frac{1}{k}}}{k}\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{k}\frac{1-v^n}{(1+i)^{\frac{1}{k}}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \\ (1+i)^{\frac{1}{k}} &= 1+\frac{i^{(k)}}{k} \\ (1+i)^{\frac{1}{k}}-1 &= \frac{i^{(k)}}{k} \end{aligned}$$

より

$$a^{(k)}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i^{(k)}}$$

$\ddot{S}^{(k)}_{\overline{n|}}$,$S^{(k)}_{\overline{n|}}$についても同様です。実際に手を動かして確認してみてください。

ここで $k\to\infty$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\overline{n|}} &= \frac{(1+i)^n-1}{\delta} \\ \bar{a}_{\overline{n|}} &= \frac{1-v^n}{\delta} \end{aligned}$$

となります。

　毎年一定額の年金について考えると、次にその一定額を変化させて見たくなります。等差数列で変化させるケースと等比数列で変化させるケースが、最も考えやすいのでよく登場します。保険でも、保険料を変化させたり、保険金を変化させたり、で特徴を持たせよう、というのはよくあるやり方で、この等差数列方式、等比数列方式というのは、ごく一般的なやり方ですからこの処理の方式を理解しておきましょう。もちろん今ではこんな等差数列、等比数列にとらわれないで、どんな変化の方式でもコンピューターにかければなんでも計算できてしまうのですが、それでもいまだに式で計算する（計算できる）ことにこだわる（愛着を持っている）人は多いですから、そのこだわりには敬意を表しておきましょう。受験生にとっては、この手の方式は式で計算できる分、問題を出しやすいので、なおさら対応に慣れておく必要があります。

　まず年金額が $1,2,3\cdots$ と増えるケースについて考えてみます。
　期始払年金現価で考えると、これを $(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$ と書くと

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = 1 + 2\cdot v + 3\cdot v^2 + \cdots + n\cdot v^{n-1}$$

となります。例によって、これに v をかけて引いてやると

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_{\overline{n|}} - v(I\ddot{a})_{\overline{n|}} &= 1 + 2\cdot v + 3\cdot v^2 + \cdots + nv^{n-1} \\ &\qquad - v - 2\cdot v^2 - \cdots - (n-1)v^{n-1} - nv^n \\ &= 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - nv^n\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}(1-v)(I\ddot{a})_{\overline{n|}} &= \ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n \\ (I\ddot{a})_{\overline{n|}} &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}}}{d} - n\frac{v^n}{d}\end{aligned}$$

期末払の場合は同様に

$$\begin{aligned}(Ia)_{\overline{n|}} &= \frac{a_{\overline{n|}}}{d} - n\frac{v^{n+1}}{d} \\ &= \frac{a_{\overline{n|}}}{d} - n\frac{v^n}{i}\end{aligned}$$

終価のほうは

$$\begin{aligned}(I\ddot{S})_{\overline{n|}} &= \frac{\ddot{S}_{\overline{n|}}}{d} - \frac{n}{d} \\ (IS)_{\overline{n|}} &= \frac{S_{\overline{n|}}}{d} - \frac{n}{i}\end{aligned}$$

となることは、確認してみて下さい。

一般の、年金額が 1,$1+h$,$1+2h$,$1+3h\cdots$ となる場合については、固定の部分と増加する部分とを分けて考えればいいだけですから、やってみて下さい。

次に、今度は年金額が複利で増えるケースについてみてみましょう。
年金額が 1,$(1+r)$,$(1+r)^2\cdots$ と増える場合の期始払年金現価は、

$$\begin{aligned}&1+(1+r)v+(1+r)^2v^2+\cdots+(1+r)^{n-1}v^{n-1}\\&=\frac{1-(1+r)^nv^n}{1-(1+r)v}\end{aligned}$$

期末払はこれに v をかけてやればいいし終価の方は期始払、期末払の年金現価にそれぞれ $(1+i)^n$ をかけてやればいいんですから、簡単に計算できますよね。
$v=\dfrac{1}{1+i}$ ですから $(1+r)v=\dfrac{1+r}{1+i}$ となります。$\dfrac{1+r}{1+i}=\dfrac{1}{1+j}$ となるような j を使えば、上の式は利率 j のごく普通の年金計算と同じになります。

さて、さいごに元利均等返済の話と減債基金の話です。

今 S だけのお金を借りて、毎年一定額だけ返済して n 年で返済を終える、とします。返済額を P とすれば返済額の合計は $n\cdot P$、返済額の合計現価は $P\cdot a_{\,\overline{n|}}$ となります。S の現価は S ですから

$$S=P\cdot a_{\,\overline{n|}}$$

として

$$P=S/a_{\,\overline{n|}}$$

と、返済額の計算は簡単にできてしまいます。期始払にしても、12 回分割の月払にしても同様のことです。

生命保険数学ではこれでおしまいなんですが、住宅ローンの計算などではこんなに単純ではなく、もう少し手の込んだ計算をします。
S に対して、利息が $S\cdot i$ だから返済額 P のうち、$S\cdot i$ は利払いにあてられて、残りの $P-S\cdot i$ が元本の返済にあてられる。その返済後の元本は $S-(P-Si)$ だから、次の年は利息は $\{S-(P-Si)\}i$、だから 2 回目の返済額 P のうち $\{S-(P-Si)\}i$ は利払いに当てられて、残りの $P-\{S-(P-Si)\}i$ が元本の返済にあてられる。その返済後の元本は $S-(P-\{S-(P-Si)\}i)$ だから $\cdots$ と計算していって、n 年後に返済後の元本が 0 になるように P を増やしたり減らしたりします。

計算は全部円単位でやるので、最終的に若干の誤差が出てくるのは最後の（あるいは最後の年の）支払額で調整します。これが住宅ローンの元利均等返済で、このローンを使った人はよく知っていると思いますが銀行からは毎回の支払の返済額のうち、利払分がいくらで、元本返済分がいくらか、返済後の元本がいくらか、という表をもらいます。

これも、月払であっても同様です。またボーナス併用払であっても同じように計算します。$S/a_{\overline{n|}}$ の計算では何となく実感がこもらないのですが、このような毎年の返済の何年分もの（毎月返済の場合は毎月分の）返済の内訳の表を受け取ると、何となく実感がこもってありがたそうなものになるようです。

減債基金というのは元利均等とは逆の、借金の返済は元本はそのままにしておいて利払のみ、プラス元本一括返済のための貯金の積み立て、の組み合わせの考え方に基づく、元本一括返済のための積立金です。

毎年、利払分だけ払うとすると、その支払額は $S \cdot i$、また n 年後に元本 S になるように積み立てる額を r とすると

$$S = r \cdot S_{\overline{n|}}$$

ですから、利払いと積立金を足すと

$$S \cdot i + S/S_{\overline{n|}}$$

これが、元利均等返済の

$$S/a_{\overline{n|}}$$

と一致することは、簡単に説明できます。練習問題として考えてみてください。

もともと、長期にわたる借金というのは、国が借金する国債くらいのもので、その場合、年々の返済額を少なくするのに、利払方式を採用しました。それで利払いだけしていると満期償還のときに、元本を返済するための資金がなく、借りかえをして返済を先送りにするしかなくなります。そのような事態を避けるため、あらかじめ元本返済の資金をためておこう、というのが減償基金の考え方です。

日本でも、国の予算や決算で国債費というのがあります。

これは、国債の利払いのための支出と、減債基金の積み立てのための費用を合計したもので、この積み立ててある減債基金のことを日本の国の会計では国債整理基金といって、国債整理基金特別勘定という勘定で管理しています。

もちろん本来的には国債の償還のためにきちんとこの基金の積み立てをしなければいけないのですが、支払いは将来のことだし、今、目の前にお金がある、と思うとついつい使ってしまいたくなるのは人情ですから、現実にはなかなか計画通りの積み立てができないようです。

生命保険数学ではもちろん、とりあえず金利計算どおりの積み立てをする、という前提でこの減債基金の計算を行います。

日本では住宅ローンの返済は、元利均等返済方式が一般的ですが、欧米では、利払い＋元本一括返済方式もよく使われているようです。この元本一括返済のための積み立て（すなわち、減債基金の積み立て）のために、銀行預金も使われますが、生命保険の養老保険が使われるのもごく普通のことです。借入期間の終了時に満期保険金が受取れますから、その満期保険金で借入金の元本を一括して返済する、というわけです。この場合、返済期間が満了する前に死亡した場合でも養老保険から、元本と同額の死亡保険金が支払われるのでそこで一括返済してしまえば借金はなくなります。日本で元利均等払の住宅ローンに団体信用生命保険をつけるのと同じことを、欧米では利払いのみ元本一括返済方式の住宅ローンに養老保険を組み合わせることで同じ効果を得ています。
イギリスやオランダではこのような住宅ローンのため、養老保険の契約高が異常に大きくなっています。